MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHATODIK ÉVFOLYAM

I. FÜZET 1907 JANUÁRIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

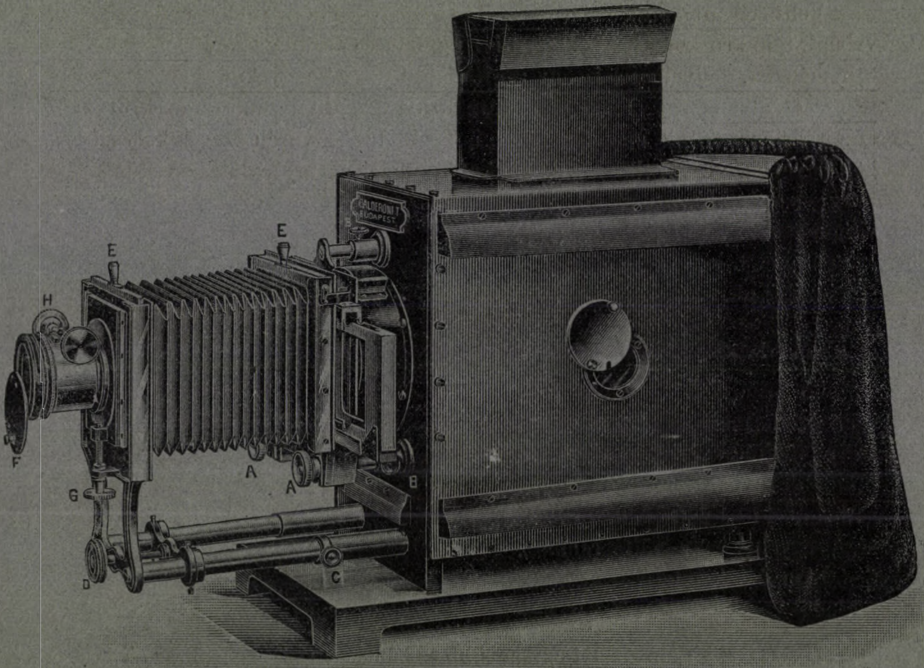
1907.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K 260.—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

TIZENHATODIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1907

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENHATODIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második füzet.

Harmadik—Negyedik füzet.

Ötödik füzet.

*

Hatodik füzet.

Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Önálló és ismertető czikkek.

Társulati ügyek.

Kitűzött és megoldott feladatok.

MEGADOTT HATVÁNYSOR FOLYTATÁSÁNAK ANALITIKAI ELŐÁLLÍTÁSA.

(Első közlemény.)

Bevezetés.

A komplex változó függvénytanában két klasszikus felfogást tarthatunk szem előtt.[1] Az egyik a CAUCHY[2]-RIEMANN[3]-féle a monogeneitás feltételeit szolgáltató jól ismert CAUCHY-RIEMANN-féle differencziálegyenletekhez, a LAPLACE-féle egyenlethez és CAUCHY integráltételeihez fűződik.[4]

Ha a monogeneitás feltételeit teljesítő függvénynek valamely tartomány minden helyén *meghatározott* véges értéke van, akkor ebben *holomorf*nak vagy *szinektikus*nak mondjuk.

Szinektikus függvény CAUCHY-féle integrálelőállítását egy ilyen tartományra alkalmazván, az is könnyen kimutatható, hogy a tartomány tetszésszerinti helye körül a *függvény hatványsorba fejthető.*

WEIERSTRASS[5] a függvénynek éppen ezt a tulajdonságát veszi definicziójánál alapul.

---

[1] A két felfogást szépen vázolja pl. HURWITZ: Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen in neuerer Zeit. — Előadás a zürichi kongresszuson. (E folyóirat 9. k.)

[2] CAUCHY: Analyse algébrique. 1821. Résumés analytiques. 1883.

[3] RIEMANN: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse. — Inaug. Diss. Göttingen, 1851.

[4] CAUCHY integráltételeinek bebizonyításánál nem csak a függvénynek, de differencziálhányadosának folytonosságát is feltételezte, míg nem GOURSAT-nak sikerült oly bebizonyítást adnia, mely erre az utóbbi tulajdonságra nem támaszkodik. — Acta Math. 4. k. Bull. Am. Math. Soc. 1899. Americ. Transact. 1900.

[5] WEIERSTRASS: Abhandlungen aus der Functionenlehre. 1886. stb.

Kiindul valamely

$$f(z) = A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

alakú hatványsorból. E sor összetartó egy bizonyos z_0 középpontú és r sugarú körön belül, széttartó e körön kívül, míg e kör kerületének egyes pontjaiban való viselkedése a sor egyéni tulajdonságaitól függ. E kört az illető hatványsor *összetartási körének* nevezzük. A függvény további definicziójára nézve e hatványsor szolgál kiinduló elemül. Ugyanis e kör belsejében egy tetszésszerinti z_1 helyet fölvéve, az előbbi hatványsorból levezethetünk egy $z-z_1$ hatványai szerint haladó sort. Ez új hatványsor összetartási köre vagy kilép az előbbi hatványsor összetartási köréből, vagy pedig ezen belül maradva, ennek kerületét belülről érinti. Az előbbi esetben a két kör közös részében a két hatványsor egyenlő értékeket szolgáltat, de az új kör olyan helyeket is tartalmaz, melyeket az eredeti nem tartalmazott. Az eredeti hatványsorral értelmezett függvény definicziójának kiegészitéseképen abban állapodunk meg, hogy *ezekre a helyekre nézve a függvényt az új hatványsor értelmezze,* a miért is az új hatványsort az eredeti *közvetetlen folytatásának* nevezzük. Ha ezt az eljárást az eredeti összetartási kör minden belső pontjára alkalmazva gondoljuk, a hatványsoroknak egész rendszerét kapjuk, a mely hatványsorok mindegyikéhez tartozik egy-egy összetartási kör. Még kiterjedtebb tartományt kaphatunk, ha az eddig nyert hatványsorokból az immár jellemzett folytatási elv alkalmazásával megint új sorokat vezetünk le, s i. t.

A hatványsorok ez összesége, melyet Weierstrass a *hatványsorok monogén rendszerének* nevez, egy egyetlen analitikai függvényt definiál. Az egyes hatványsorokat a függvény elemeinek nevezzük. Ez elemek közül bármelyiket véve is föl adottnak, a függvény tökéletesen meg van határozva.

Egy bizonyos z hely azonban végtelen sok összetartási kör belsejében lehet, a mely körökhöz tartozó függvényelemek mindegyike a z hez egy-egy $f(z)$ értéket rendel. Ha ez $f(z)$ értékek mind megegyeznek, a függvényt *egyértékűnek* (monodróm, monotróp) nevezzük, ha pedig nem egyeznek meg, *többértékűnek* (polidróm) mondjuk. Hogy ezek közül az értékek közül melyiket veszszük tekintetbe, az attól az úttól függ, melyen z_0-ból z-be haladtunk.

Vivanti,[6] Poincaré[7] és Volterra[8] egyszerű meggondolások alapján kimutatták, hogy ha valamelyik függvényelemből egy másik tetszésszerintit akarunk levezetni, ezt mindig *véges számú lépésben* eszközölhetjük. Ezzel egyenlő értékű az a tétel, hogy, ha a függvény egy helyen végtelen sok értéket is vesz föl, ezek az értékek *megszámlálható* halmazt alkotnak.

Azok a helyek, melyek az előbb jellemzett hatványsorok valamelyikének összetartási körébe esnek, alkotják, Weierstrass elnevezése szerint, a *függvény folytonossági tartományát.* E tartomány tetszésszerinti helye körül, a mint már többször mondottuk, a függvény hatványsorba kifejthető, azért is ezeken a helyeken a függvényt *szabályos viselkedésünek* mondjuk. A függvény folytonossági tartományáról közvetetlenül belátható, hogy ez *kizárólag belső*[9] *helyekből álló tartomány.* Azonfelül e tartomány tetszésszerinti x_0 és x helyeit felvéve, közbeiktathatunk véges számú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyet úgy, hogy ezek mindegyike körül rajzolható oly elég kis sugarú kör, mely teljesen a tarto-

---

[6] Vivanti: Sulle funzioni ad infiniti valori. Palermo Rend. 2. k. 1888. — Sulle funzioni analitiche. Ugyanott. 3. k. 1899. — Zur Theorie der mehrwertigen Functionen. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 34. k. 1889.

[7] Poincaré: Sur une propriété des fonctions analytiques. Palermo. Rend. 2 k. 1888.

[8] Volterra: Sulle funzioni analitiche polidrome. Rom. Acc. L. Rend. (4) 4 k. 1888.

[9] A sík pontjait egy tartományra nézve három osztályba sorozhatjuk. Esetleg rajzolható a pont körül oly elég kis sugarú kör, melynek belsejében lévő összes pontok a tartománynak is pontjai. Ezeket a tartomány *belső helyeinek* nevezzük. Azokat a helyeket, a melyek körül rajzolt elég kis sugarú kör belsejében lévő helyek egyike sem tartozik a tartományba, *külső helyeknek* mondjuk. Végre azokat a pontokat, melyeknek tetszésszerinti kis környezetében legalább egy olyan hely van, mely a tartományhoz tartozik, és legalább egy olyan, mely nem tartozik a tartományhoz, a tartomány *határhelyeinek* nevezzük.

mányba esik és az utána következő helyet tartalmazza. Az ilyen tartományt WEIERSTRASS elnevezése szerint röviden *kontinuum-nak* mondjuk.

Arra a kérdésre, hogy vajjon adva lévén egy tetszésszerinti kontinuum, létezik e mindig olyan analitikai függvény, melynek folytonossági tartománya e kontinuummal megegyezik, MITTAG-LEFFLER,[10] RUNGE[11] és STÄCKEL[12] adtak igenlő választ.

A folytonossági tartomány belső helyeit a függvény *rendes helyeinek*, határhelyeit pedig a függvény *szinguláris helyeinek* nevezzük. Ez utóbbiakról definicziójuk értelmében világos, hogy *zárt ponthalmazt*[13] alkotnak.

A szinguláris helyek lehetnek *izoláltak* és *nem izoláltak*. (Izolált az oly szinguláris hely, melynek van oly elég kis környezete, a melyben nincs több szinguláris hely.) Az oly görbét, melynek minden pontja szinguláris hely, a függvény *szinguláris vonalának* nevezzük. Ha egy ilyen szinguláris vonal a függvény folytonossági tartományát a sík valamely tartományától teljesen elválasztja, akkor ez utóbbi tartományba a függvény természetesen nem folytatható. (*Fonctions à espaces lacunaires.*)

Az egyértékű analitikai függvények izolált szinguláris helyei között lehetnek olyanok, a melyeknek környezetében a függvény minden határon túl nő, de reczíprok értéke szabályosan viselkedik. Ezek a *pólusok*. Azok az izolált szinguláris helyek, a melyeknek környezetében a függvény nem viselkedik így, a *lényeges szinguláris helyek*.

A függvényt, a szerint, a mint egy-, illetve többértékű, a számsíkon (vagy gömbön), illetve a megfelelő RIEMANN-féle felületen állítjuk elő.

---

[10] MITTAG-LEFFLER: Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta Math. 4. k. 1884.

[11] RUNGE: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Acta Math. 6. k. 1885.

[12] STÄCKEL: Zur Theorie der eindeutigen analyt. Functionen. Crelles Journal. 112. k. 1893.

[13] Zárt ponthalmaz az olyan, mely sűrűsödési helyeinek összeségét, vagyis röviden: derivált halmazát tartalmazza.

Röviden megemlékezünk most még a hatványsor egyes fontosabb tulajdonságairól, a melyekre tulajdonképeni tárgyalásunkban többször szükségünk lesz.

Legyen most már csakugyan adva meghatározott együtthatókkal biró hatványsor:

$$A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots$$

Az összetartási kör sugara a hatványsor együtthatóiból aránylag könnyen nyerhető.

Definiálunk előbb egy az A_n együtthatóktól egyszerűen függő mennyiséget:

Ha általánosan adva van az $u_0, u_1, u_2, \ldots$ valós mennyiségeknek végtelen sorozata, akkor L-et abban az esetben mondjuk e mennyiségek *limes superior*-jának, ha bármilyen kicsinynek választottuk is ε-t:

1. Mindig létezik oly m, a melytől kezdve $u_m < L+\varepsilon$.

2. Létezik végtelen sok olyan tetszés szerint nagy m, melyre nézve $u_m > L-\varepsilon$.

$+\infty$ akkor lehet *limes superior*, ha a sorozat számai *szabályosan közelednek* $+\infty$ felé és ugyancsak, ha a sorozat csupa pozitiv számot tartalmaz, 0 csak akkor lesz *limes superior*, ha a sorozatnak 0 egyszermind *határértéke* is.

Az $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$ sorozat *limes superior*-ját röviden

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\, u_m\text{-}$$

mel jelöljük.

Cauchy e mennyiséget «*la plus grande des limites*»-nek,[2] P. Dubois-Reymond pedig «*Obere Unbestimmtheitsgrenze*»-nek nevezte.[14]

Cauchy mondotta ki azt a tételt,[2] hogy az $A_0, A_1, A_2, \ldots$ együtthatókkal biró hatványsor *összetartási körének r sugarát* az

$$r=\frac{1}{\overline{\lim}\left|\sqrt[m]{A_m}\right|}$$

képlet szolgáltatja.

[14] Dubois-Reymond: Antrittsprogramm der Universität Freiburg. 1871; Allgemeine Functionentheorie. S. 266.

E tételt HADAMARD CAUCHYtól teljesen függetlenül újra felfedezte és közölte, a mi által nagyobb körben elterjedt.[15]

Ha most $\overline{\lim} \left| \sqrt[m]{A_m} \right| = 0$, (pl. az $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ függvénynél), akkor az összetartási kör sugara ∞, tehát a függvény minden véges helyen szabályosan viselkedik. (Ha a ∞-ben sincs szingularitása, akkor a függvény csak *konstans* lehet: LIOUVILLE.) Az ilyen függvényt *egész függvénynek* mondjuk. Ezeknél a függvényeknél analitikai folytatásról nem lehet szó, mert a TAYLOR-sor a függvényt az egész síkon megadja. Ha pedig $\overline{\lim} \left| \sqrt[m]{A_m} \right| = \infty$, akkor az $A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$ TAYLOR-sor csakis az $x = a$ helyen összetartó (pl. az

$$f(x) = 1 + (x-a) + 2!\,(x-a)^2 + \cdots$$

hatványsor) s így a TAYLOR-sor más pontban egyáltalán nem értelmezi a függvényt. Tehát a WEIERSTRASS-féle értelemben nem definiálhatjuk e hatványsor analitikai folytatását, hacsak újabb megállapodásokat nem alkotunk. Egyelőre úgy ezt az esetet, mint az egész függvény esetét tárgyalásainkból kizárjuk és feltételezzük, hogy $\overline{\lim} \left| \sqrt[m]{A_m} \right|$ a 0-tól különböző véges szám.

Az eddigieket előrebocsátva, közvetetlenül világos, hogy a hatványsorból levezethető új hatványsorok összes együtthatóit s ez által a függvény teljes analitikai folytatását az eredeti TAYLOR-sor együtthatói legalább elméletileg tökéletesen meghatározzák.

Közvetetlen feladatunk most ezen elméletileg teljesen megadott függvényt valóban meghatározni és rámutatni azokra a nehézségekre, melyek a feladat megoldásakor fellépnek.

Legyen tehát adva az

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$$

alakú TAYLOR-sor, mely hatványsor összetartási körének véges és a zérustól különböző sugara van. A hatványsor összetartási körén belül lévő tetszésszerinti b pont körül a függvényt új

[15] HADAMARD: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journal de mathématiques. (4) t. 8. (1892).

hatványsorba kifejtvén, az előbbi sornak egy transzformáltját kapjuk, a mely ilyen alakú lesz:

$$f(x)=B_0+B_1(x-b)+B_2(x-b)^2+\cdots$$

a hol

$$B_m=A_m+\cdots+\binom{m+k}{m}A_{m+k}(b-a^k)+\cdots \qquad 1)$$

Az ilyen módszer azonban nagyon ritkán vezet czélhoz, ha a b pontot egészen tetszésszerint választjuk. Ha ugyanis az eredeti kör a középpontját b-vel összekötő sugár átmegy egy a K összetartási kör kerületén fekvő szinguláris helyen, akkor a b hely körül való hatványsorba fejtés nem vezet analitikai folytatáshoz, mert a megfelelő összetartási kör az eredetinek teljesen belsejében van s a mint előbb már említettük is, ezt az illető szinguláris pontban érinti. Hogy tehát ez az eljárás sikerrel legyen alkalmazható, első sorban meg kell határoznunk a K összetartási körön fekvő szinguláris helyeket. Úgy ezen az összetartási körön, mint a kívüle fekvő szinguláris helyek ismeretének a további tárgyalásokban is nagy szerep jut, a mennyiben egyenesen tőlük függnek azok a tartományok, a melyekben a függvényt előállítjuk. A meghatározásukra szolgáló módszereket nem ismertethetjük bővebben, hanem e tekintetben Hadamard kitűnő kis művére[16] utalunk. Különben is a függvény előállítására vonatkozó ismertetendő eljárások némelyike e helyek meghatározására is fog módszert szolgáltatni.

Egy másik az analitikai folytatás tényleges meghatározásánál föllépő nehézség abban rejlik, hogy bár a függvény értéke a folytonossági tartomány bármelyik pontjában tetszésszerinti pontossággal meghatározható, a számítások az (1) alatti és hasonló alakú relácziókon alapulnak. Az új együtthatóknak e relácziókból való meghatározása azonban rendkívül nehézkes, mert minden egyes B_m együttható az A_m együtthatóknak végtelen sokaságától függ. Ez a körülmény egyik legfőbb akadálya a folytatás

[16] Hadamard: La série de Taylor et son prolongement analytique. 1901 (Scientia).

tényleges eszközlésének és ez egyszersmind arra indit bennünket, hogy az analitikai függvény előállítására más eljárásokat keressünk.

Új módszerek keresése.

Annak az előbbi problémának, hogy a függvényt folytonossági tartományának tetszésszerinti helyén, bizonyos, előre megadott pontossággal meghatározzuk, mintegy általánosítása a következő:

Ismerve az $F(x)$ függvénynek az a hely körül való sorbafejtésében szereplő $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ... értékeket, (a hol $F^{(k)}(a)$ az ismert jelölés szerint az $F(x)$ függvénynek az a helyen vett k-ik differencziálhányadosát jelenti), a melyekkel meghatározott TAYLOR-sor az a középpontú összetartási kör minden belső pontjában megadja a függvény értékét, nem szerkeszthetünk-e ezen együtthatók ismeretén alapuló új algorithmusokat, a melyek a függvény értékét az összetartási körön kívül, lehetőleg kiterjedt tartományban megadják?

Mint látni fogjuk, ilyen algorithmusok csakugyan léteznek. Ezeknek jellemző tulajdonságuk lesz, hogy érvényességi tartományuk az eredeti összetartási kört mindig magában foglalja, míg ha WEIERSTRASS módszere szerint ezen összetartási körnek egy belső pontja körül új TAYLOR-sorba fejtést eszközlünk, ennek összetartási köre az eredetinek egy részét kizárja magából.

Első sorban MITTAG-LEFFLER polinomiális előállítását fogjuk ismertetni, hogy azután rámutassunk azokra az új szempontokra, melyek az elért eredmények alapján az analitikai folytatás elméletében felmerültek.

MITTAG-LEFFLER a következő feladatot tűzi maga elé: [17], [18]

---

[17] MITTAG-LEFFLER: Om en generalisering af potensserien. Vet. Ak. Öfversigt; 1898, Stockholm.

— Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion. Ugyanott.

[18] — Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Első Közlemény: Acta Math. t. 23. — Második és

Szerkesztendő oly analitikai kifejezés, a mely adott ponthoz tartozó hatványsornak analitikai folytatásait szolgáltatja. Ő tehát a WEIERSTRASS-féle szempontból tekinti a függvény előállításának problémáját, bár maga is megjegyzi, hogy első tekintetre CAUCHY módszere látszik e feladat megoldására a legalkalmasabbnak. A mint u. i. az integrál definicziójából következik, az

$$F(x) = \int\limits_C \frac{F(z)}{z-x}\, dz$$

integrál helyettesithető oly raczionális kifejezésekből alakitott végtelen sorral, melyeknek együtthatóit a C görbe megszámlálható sokaságban lévő pontjaiból és az ezekhez tartozó függvényértékekből meghatározhatjuk. RUNGE pl. ezen az alapon tényleg szerkesztett is egy ilyen előállitást.[11] Ha azt akarjuk, hogy az előállitás a függvény folytonossági tartományának lehető nagy részére érvényes legyen, ezt elérhetjük akként, hogy a független változó emlitett értékeit a folytonossági tartomány határához végtelenül közel választjuk. (Illetőleg, a mint ezt RUNGE-nél is látjuk, a görbék, a melyeknek mentén integrálunk, a folytonossági tartomány határa felé, az egyes görbéknek megfelelő előállitások pedig egy határelőállitás felé konvergálnak.)

De ha feladatunkat gyakorlati szempontból, illetve az alkalmazások szempontjából tekintjük, szembe ötlik, hogy az analízisnek nagyon fontos és gyakran előforduló problémáinál a már többször emlitett értékek nincsenek megadva, de annál többször találkozunk oly esetekkel, midőn a függvénynek és összes

harmadik közlemény: t. *24*. Negyedik közlemény: t. *26*. Ötödik közlemény: t. *29*.

— Sur la représentation analytique d'une branche uniforme de fonction analytique. Comptes Rendus. 15. mai 1899.

— Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione monogena. Atti dell' Academia delle Scienze di Torino. Vol. 34. fasc. 2; 1899.

— On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function. Transact. of the Cambridge phil. Society. t. 18; 1900 stb.

differencziálhányadosainak értékeit *egyetlen* helyen ismerjük. (Tehát a függvény újból bizonyos értékeknek *megszámlálható* halmazával van értelmezve.) Pl. ez az eset forog fenn az analizisnek egy nagy jelentőségű problemájánál, mely a közönséges differencziálegyenletek integrálására vonatkozik.

Valóban fontos feladat tehát ez értékek ismeretéből oly egyértékű analitikai kifejezést szerkeszteni, mely az $F(x)$ függvényt, vagy ha ez többértelmű, ennek egy ágát a folytonossági tartományban ábrázolja. Mint látni fogjuk, MITTAG-LEFFLER-nek sikerült e problémát teljesen megoldania.

MITTAG-LEFFLER tárgyalásainak fontos segédeszköze az az alakzat, melyet *csillagnak* (étoile) nevezett és a mely a tőle származó kifejezésnek folytonossági tartományát állapitja meg. De lássuk előbb, mily körülmények teszik e segédeszköz alkalmazását szükségessé.

Az analitikai kifejezés, melyet MITTAG-LEFFLER a függvény előállítására felhasznál, egyértékű. De valamely analitikai függvény általában nem egyértékű, hanem a mint már említettük, egy bizonyos x helyen más és más értékeket vehet fel, a szerint, a mint más és más úton haladtunk az eredeti függvényelem összetartási körének középpontjából x-be. Ez értékek azonban mindig megegyeznek akkor, ha a két különböző út által bezárt tartományban nincs a függvénynek szinguláris helye. Épen ezért *mesterséges metszeteket* (coupure artificielle) kell alkalmaznunk, a mint azt a most ismertetendő MITTAG-LEFFLER-féle csillag szintén mutatja. Az ilyen metszetekkel ellátott folytonossági tartományban azután a függvény egyes ágait állitjuk elő.

Egyszerűség kedvéért legelőbb az *egyenes vonalú csillagot* definiáljuk, bár, mint később látni fogjuk, más alakú csillagok alkalmazása sem okoz különösebb nehézséget.

Ennek definicziója a következő:

A sik egy állandó a pontja körül forgó l félsugáron legyen a_l egy egyértelműen meghatározott oly pont, melynek a-tól való távolsága nagyobb egy előre megadott véges hosszúságnál.

A félsugárnak a_l-től a ∞-ig haladó része mentén alkalmazzuk az előbb említett mesterséges metszetet. Ezt az eljárást az a pontból kiinduló összes félsugarakra alkalmazván, azt a tartományt, mely a metszetek alkalmazása után a síkból megmarad, *csillagtartománynak*, vagy röviden *csillagnak* nevezzük. Az a pontot a csillag *középpontjának*, az a_l pontokat pedig a csillag *csúcsainak* mondjuk.

Legyen most már adva az a helyen a függvény értéke, differencziálhányadosainak értékeivel együtt. Az így meghatározott függvényelem folytatását képezvén az a pontból kiinduló tetszésszerinti félsugáron, a_l pontnak az ezen a félsugáron található, a-hoz legközelebb eső szinguláris pontot tekintjük. Ha egy félsugáron egyáltalán nincsen a végesben szinguláris hely, akkor természetesen ennek mentén nem kell metszetet alkalmaznunk.

A csillagnak (melyet ezentúl rövidség kedvéért mindig A-val jelölünk), minden egyes x helyén a függvény értékét úgy kapjuk, hogy a-ból x-be oly úton haladunk, mely teljesen a csillag belsejébe esik. E megállapodást szem előtt tartva, a függvény egy egyértékű ágát nyerjük, melyet $FA(x)$-szel jelölünk.

A Mittag-Leffler-féle tétel most már a következőképen hangzik.

Az $FA(x)$ függvényág mindig előállítható, még pedig végtelen sokféleképen oly

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)$$

alakú sorral, a melyben a $G_n(x)$ kifejezések x-nek raczionális egész függvényei:

$$G_n(x) = \sum_{\nu} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

és ezekben a $c_\nu^{(n)}$ együtthatók a-nak megválasztásától és az $F^{(\nu)}(a)$ értékektől teljesen függetlenek és ezeknek ismerete nélkül előre megadhatók. A $\Sigma G_n(x)$ sor az A csillag minden belső helyén összetartó és egyenletesen összetartó minden olyan tartományban, melyet e csillag teljesen magába zár.

Legyen most már csakugyan X egy az A csillag belsejében fekvő tartomány. Mindenek előtt feltehetjük, hogy az X tartomány határát minden az a pontból kiinduló félsugár csak egy pontban metszi. Mert ha ez nincsen így, akkor definiálhatjuk az X' tartományt a következőképen: Egy tetszésszerinti félsugáron legyen a és az X tartomány pontjai közti távolságok felső határa R. Minden e félsugáron fekvő pont, melynek a-tól való távolsága $\leq R$, X'-be tartozzék, azok a pontok pedig, melyekre nézve ez a távolság $> R$, ne tartozzanak X'-be.[19] Innen következik, hogy az X' tartomány X-et magába zárja, azonfölül, ha X véges, X' is az. Végre az is könnyen belátható, hogy X' az A csillag belsejében van s hogy minden az a pontból kiinduló félsugár e tartomány határát csak egy pontban metszi. Így tehát ez utóbbi tulajdonságot tényleg X-re nézve is feltételezhetjük, mert ellenkező esetben X-et helyettesíthetnők a fenti X' tartománynyal.

Ha továbbá X tetszésszerinti határpontjának tetszésszerinti szinguláris helytől való távolságát r-rel jelöljük és r értékét az összes határpontokra és szinguláris helyekre nézve meghatározzuk, ezeknek alsó határa δ nem lehet 0. Minthogy ugyanis úgy X határhelyei, valamint a szinguláris helyek zárt ponthalmazt alkotnak, r eléri az alsó határát,[20] a mely pedig minthogy az X tartomány az A csillag belsejében fekszik, 0-tól mindenesetre különbözik. Ha már most minden az a pontból kiinduló félsugárnak X tartományba eső részéhez $\frac{\delta}{2}$ nagyságú vonaldarabot adunk, nyerünk egy új csillagot E-t, mely X-et magába zárja s a mely A belsejében van.[21]

---

[19] Ha valamely félsugár X-nek egy pontját sem tartalmazza, akkor erre tetszésszerinti vonaldarabot mérünk rá, csak arra ügyelvén, hogy a felmért darab teljesen az A csillag belsejébe essék.

[20] L. pl. Jordan: Cours d'Analyse. II-ème éd. 1893, t. I. p. 24.

[21] E-nek lényeges jellemző sajátsága, a melyért épen bevezettük, az, hogy akkor is véges, mikor A a végtelenig nyúlik. (Feltéve természetesen, hogy nem egész függvénynyel van dolgunk.)

MITTAG-LEFFLER most még néhány segédcsillagot definiál:

Legyen n pozitiv egész szám. Egy az a pontból kiinduló félsugáron haladván, jelentsen r oly elég kicsiny mennyiséget, hogy, ha a félsugárra a-tól kiindulva $(n-1)r$-nyi darabot felrakunk, e vonaldarab minden pontjából r sugárral leírt kör még E belsejében legyen. Legyen továbbá a vizsgált félsugáron r felső határa ρ, akkor a félsugárra $n\rho$-t felmérvén, a félsugárnak egy teljes körülforgása után nyerünk egy új csillagot, melyet $E^{(n)}$-nel jelölünk. Világos, hogy $E^{(1)}$ kör, hogy $E^{(k)}$ $E^{(k-1)}$-et, E pedig az összes $E^{(n)}$ csillagokat magába zárja.

Jelentsen most α az 1-nél kisebb pozitiv számot, akkor minden $E^{(n)}$-ből n új csillagot nyerhetünk az által, hogy ρ helyébe a

$$\rho_\mu = \alpha^\mu \rho \quad (\mu=1, 2, \ldots, n)$$

értékeket teszszük. A ρ_μ-nek megfelelő csillagot $E_\mu^{(n)}$-vel jelöljük.

Ezek után elérhetjük azt, hogy ne csak E, de $E^{(n)}$ is magába zárja X-et, ha csak n egy bizonyos n-nél nagyobb. Jelentse ugyanis R egy oly a középpontú körnek sugarát, mely az X tartományt teljesen magába zárja. Ha most még az X tartomány helyei és az E csillag határhelyei közötti távolságok minimumát (mely, mint tudjuk, 0-tól különbözik), δ-val jelölvén, n-et $\frac{R}{\delta}$-nál nagyobbnak választjuk, E_n mindenesetre tartalmazza X-et.

Ha n elég nagy ahhoz, hogy ezt a feltételt teljesitse, akkor azt is elérhetjük, hogy $E_n^{(n)}$ is tartalmazza X-et. Egyszerűen α-t úgy teszszük n-től függővé, hogy α^n tetszésszerint megközelitse az egységet, ha n elég nagy. A továbbiakban felteszszük, hogy n-et és α-t e feltételeknek megfelelően választottuk.

Áttérünk e bevezető megállapodások után a függvény tényleges előállitására.

Jelentse x az X tartomány tetszésszerinti helyét és legyen

$$\xi = \frac{x-a}{n} \tag{2}$$

és

$$\xi_\mu = a+\mu\frac{x-a}{n}\cdot \tag{3}$$

Az X tartományban és határhelyein jelentse g az $|FA(x)|$ érték felső határát. Azonkívül legyen l az x pontot az a ponttal összekötő félsugár. A 13. oldalon mondottak szerint ehhez a félsugárhoz tartozik egy ρ mennyiség, melynek tulajdonságait ott definiáltuk.

Ki fogunk most mutatni egyes egyenlőtlenségeket, a melyekre a továbbiakban nagy szükségünk lesz.

Ha z a független változónak oly helye, mely kielégíti a

$$|z-\xi_{n-1}| < \rho \tag{4}$$

egyenlőtlenséget, akkor z még az E csillag belsejében van. Ugyanis $|\xi_{n-1}| < (n-1)\rho$, tehát a ξ_{n-1} hely körül ρ sugárral leírt kört az E csillag tartalmazza. De

$$FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})(z-\xi_{n-1})^{\lambda_1}. \tag{5}$$

(Rövidség kedvéért $\frac{d^\lambda FA(x)}{dx^\lambda}$-et $F^{(\lambda)}(x)$-szel jelöljük.)

Ebből azonban Weierstrassnak egy jól ismert tétele szerint következik, (a 4) alatti egyenlőtlenséget tekintetbe véve)

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\right| < \frac{g}{\rho^{\lambda_1}}\cdot \tag{6}$$

De mivel az X tartományt az $E_1^{(n)}$ csillag is magába foglalja, tehát $|\xi| < \rho_1 = a\rho$. És így

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}\right| < g\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\lambda_1} = ga^{\lambda_1}. \tag{7}$$

Rajzoljunk még a ξ_{n-2} pont körül egy ρ_1 és egy ρ sugarú kört; legyen z_1 az első kör tetszésszerinti pontja, z pedig oly pont, melynek z_1-től való távolsága kisebb, mint $\rho-\rho_1$, a mely tehát a második kör belsejében van. Egyenlőtlenségekkel kifejezve:

$$|z_1-\xi_{n-2}|<\rho_1,\quad |z-z_1|<\rho-\rho_1,\quad |z-\xi_{n-2}|<\rho. \tag{8}$$

Minthogy ξ_{n-2} körül ρ sugárral leírt kör az E csillagon belül van, tehát E a z_1 pont körül $\rho-\rho_1$ sugárral leírt kört is tartalmazza, s így az

$$FA(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_1!}F^{(\lambda_1)}(z_1)(z-z_1)^{\lambda_1} \tag{9}$$

sor összetartó, ha csak z és z_1 eleget tesznek a fenti egyenlőtlenségeknek.

WEIERSTRASS tételét újból alkalmazva:

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!}F^{(\lambda_1)}(z_1)\right|\leqq g(\rho-\rho_1)^{-\lambda_1}$$

s minthogy

$$|z_1-\xi_{n-2}|^{\lambda_1}\leqq\rho_1^{\lambda_1}$$

tehát

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!}F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_1}\right|\leqq g\frac{\rho_1^{\lambda_1}}{(\rho-\rho_1)^{\lambda_1}}=g\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1}. \tag{10}$$

Mivel továbbá

$$F^{(\lambda_1)}(z_1)=\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_2!}F^{(\lambda_2)}(\xi_{n-2})(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_2}, \tag{10'}$$

$$\frac{1}{\lambda_1!}F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_1}=\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}$$

WEIERSTRASS fenti tételét ismét alkalmazván, 8)-ból és 10)-ből ered:

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\right|\leqq g\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1}\rho_1^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

De minthogy x nem csak az $E_n^{(1)}$ csillagnak, hanem $E_n^{(2)}$-nek is belsejében van, tehát

$$|\xi|<\rho_2=a\rho_1,$$

és így

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_1+\lambda_2}\right|\leqq g\left(\frac{a}{1-a}\right)a^{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{11}$$

Ezt az eljárást folytatva bevezethetünk 3, 4, ..., n segédváltozót. Végre tehát, ha az utoljára bevezetett n segédváltozót rendre:

$$z, \; z_1, \; z_2, \ldots, z_{n-2}, \; z_{n-1}\text{-}$$

gyel jelöljük és felteszszük róluk, hogy

$$|z_{n-1}-a| \leq \rho_{n-1}, \quad |z_{n-2}-z_{n-1}| < \rho_{n-2}-\rho_{n-1}, \ldots$$
$$|z_1-z_2| \leq \rho_1-\rho_2, \quad |z-z_1| \leq \rho-\rho_1$$

egyenlőtlenségeket kielégítik,[22] akkor felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\left| \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\,\xi^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \right| \leq$$
$$\leq g a^{\lambda_1} . a^{\lambda_1+\lambda_2} \ldots a^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-2}} \left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} a^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}. \qquad 12)$$

Az 5) alatti kifejtés minden olyan z-re érvényes, mely a $|z-\xi_{n-1}| \leq \rho$ feltételnek eleget tesz. Azonban, mint ez a ξ értékek definicziójából világos

$$x-\xi_{n-1} = \xi$$

és $\xi < \rho$, mert x az E_n csillag belsejében van. Így tehát 5)-ben z helyett x-et is tehetünk.

$$FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}. \qquad 13)$$

Legyen

$$\sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1} = \varepsilon_1, \qquad 14)$$

a hol m_1 egy később meghatározandó számot jelent.

7) szerint tudjuk, hogy

$$\varepsilon_1 \leq g \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} a^{\lambda_1} = g\frac{a^{m_1+1}}{1-a}. \qquad 15)$$

---

[22] Ha csak két segédváltozót z_1-et és z-t vezetünk be, akkor felveszszük, hogy $|z_1-\xi_{n-2}| \leq \varrho_1$; ha hármat alkalmazunk, akkor felteszszük, hogy $|z_2-\xi_{n-3}| \leq \varrho_2$; végül n változónál fel kell tenni, hogy $|z_{n-1}-a| \leq \varrho_{n-1}$.

Írjuk $FA(x)$ előbbi kifejezését az

$$FA(x)=\sum_{\lambda_1=1}^{m_1}\frac{1}{\lambda_1!}F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}+\varepsilon_1$$

alakba. Tegyünk azonkívül 10')-ben z_1 helyébe ξ_{n-1}-et, A sor összetartó marad, mert hiszen

$$|\xi_{n-1}-\xi_{n-2}|=|\xi|\leq\rho.$$

Igy tehát

$$\frac{1}{\lambda_1!}F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}=\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_1+\lambda_2}$$

$\lambda_1=0$-tól $\lambda_1=m_1$-ig összegezve

$$\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\frac{1}{\lambda_1!}F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}=\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Ha most

$$\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_1+\lambda_2}=\varepsilon_2,$$

a hol m_2 is egy később meghatározandó számot jelent, akkor lesz

$$FA(x)=\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_1+\lambda_2}+\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

és 11) szerint

$$|\varepsilon_2|\leq g\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty}\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1}a^{\lambda_1+\lambda_2}=g\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{1-a}\right)^{\lambda_1}a^{\lambda_2}=$$

$$=g\,\frac{1-\left(\dfrac{a^2}{1-a}\right)^{m_1+1}}{1-\dfrac{a^2}{1-a}}\;\frac{a^{m_2+1}}{1-a}=$$

$$=g\,\frac{\left(\dfrac{a^2}{1-a}\right)^{m_1}}{1-\dfrac{1-a}{a^2}}\left(1-\left(\frac{1-a}{a^2}\right)^{m_1+1}\right)\frac{a^{m_2+1}}{1-a}. \qquad 16)$$

Ezt az eljárást folytatva, végre lesz

$$FA(x)=\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\times$$

$$\times\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n, \qquad 17)$$

a hol

$$|\varepsilon_\mu|\leq g\frac{\left(\frac{a^\mu}{1-a}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-a}{a^\mu}}\frac{\left(\frac{a^{\mu-1}}{1-a}\right)^{m_2}}{1-\frac{1-a}{a^{\mu-1}}}\cdots\frac{\left(\frac{a^2}{1-a}\right)^{m_{\mu-1}}}{1-\frac{1-a}{a^2}}\times$$

$$\times\left[1-\left(\frac{1-a}{a^\mu}\right)^{m_1+1}\right]\left[1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu-1}}\right)^{m_2+1}\right]\cdots\times$$

$$\times\cdots\left[1-\left(\frac{1-a}{a^2}\right)^{m_{\mu-1}+1}\right]\frac{a^{m_\mu+1}}{1-a}. \qquad 18)$$

Ha most figyelembe veszszük, hogy

$$\mu m_1+(\mu-1)m_2+\cdots+m_\mu+1=1+m_1+(m_1+m_2)+\cdots+$$
$$+(m_1'+m_2+\cdots+m_\mu),$$

akkor az előbbi egyenlőtlenséget a következő alakban írhatjuk:

$$|\varepsilon_\mu|\leq g\prod_{k=1}^{\mu-1}\frac{1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu+1-k}}\right)^{m_k+1}}{1-\frac{1-a}{a^{\mu+1-k}}}\;\frac{a^{m_1+1}}{1-a}\;\frac{a^{m_1+m_2}}{(1-a)^{m_1}}\cdots$$

$$\cdots\frac{a^{m_1+m_2+\cdots+m_\mu}}{(1-a)^{m_{\mu-1}}}$$

Az eddigi tárgyalásokban, (melyek jórészt a továbbiakra nézve rendkívül fontos egyenlőtlenségek levezetésére szolgáltak), a-ra vonatkozólag csak azt a megszorítást tettük, hogy 0 és 1 között fekszik és hogy

$$\lim_{n=\infty} a^n=1.$$

Az

$$a=e^{-\frac{1}{n\omega(n)}} \qquad 19)$$

kifejezés teljesíti e föltételeket, ha az $\omega(n)$ mennyiségről föl-teszszük, hogy mindig pozitiv és n-nel együtt minden határon túl nő. Ha n-et elég nagynak választjuk, akkor:

$$1-a<\frac{1}{n\omega(n)} \tag{20}$$

és azonkívül, ha $\lambda=1, 2, 3, \ldots, n$:

$$a^{-\lambda}=e^{\frac{1}{n\omega(n)}}\leqq e^{\frac{1}{\omega(n)}}. \tag{21}$$

Így tehát

$$\frac{1-a}{a^{\lambda}}\leqq\frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}, \tag{22}$$

vagy ha $\mu\leqq n$ és $\mu>k\geqq 1$:

$$\frac{1-a}{a^{\mu+1-k}}<\frac{1}{n\omega(n)}e^{\frac{1}{\omega(n)}} \tag{23}$$

és így

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1-\frac{1-a}{a^{\mu+1-k}}\right]>\left[1-\frac{1}{n\omega(n)}e^{\frac{1}{\omega(n)}}\right]^{\mu-1}>$$

$$>\left[1-\frac{1}{n\omega(n)}e^{\frac{1}{\omega(n)}}\right]^{n}. \tag{24}$$

Világos, hogy ha n minden határon túl nő, ez utóbbi kifejezés határértéke $+1$. Ha tehát r tetszésszerinti 1-nél nagyobb számot jelent, meghatározhatjuk n-et úgy, hogy

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1-\frac{1-a}{a^{\mu+1-k}}\right]>\frac{1}{r}\cdot \tag{25}$$

Másrészt pedig

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu+1-k}}\right)^{m_k+1}\right]<1 \tag{26}$$

és így

$$|\varepsilon_\mu|<gr\cdot\frac{a^{m_1+1}a^{m_1+m_2}}{(1-a)^{m_1}(1-a)^{m_2}}\cdots\frac{a^{m_1+m_2+\cdots+m_\mu}}{(1-a)^{m_{\mu-1}}}\cdot \tag{27}$$

Legyen

$$\frac{a}{1-a}=\beta, \tag{28}$$

akkor az előbbiek szerint

$$|\varepsilon_\mu| < gr \, . \, \alpha^{m_1}\beta \, . \, \alpha^{m_2}\beta^{m_1} \ldots \alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_{\mu-2}+m_\mu}\beta^{m_{\mu-1}} =$$

$$= gr\alpha^{m_1}\beta\alpha^{m_2}\beta^{m_1}\prod_{i=3}^{\mu}\alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_{i-2}+m_i}\beta^{m_{i-1}}.$$

Legyen rövidség kedvéért

$$n\omega(n) = N \tag{29}$$

és igy

$$\alpha = e^{-\frac{1}{N}}, \quad \beta = \frac{1}{e^{\frac{1}{N}}-1}. \tag{30}$$

Egyszerű számítás mutatja, hogy

$$e^{\frac{1}{N}} - 1 > \frac{1}{N}$$

és így

$$\beta < N. \tag{31}$$

Válaszszuk meg az m értékeket úgy, hogy

$$\begin{gathered} m_1 \geqq 2N\log N, \\ m_2 \geqq m_1 N\log N, \\ m_1+m_2+\cdots+m_{i-2}+m_i \geqq m_{i-1}N\log N \\ (i=3, 4, \ldots, n) \end{gathered} \tag{32}$$

egyenlőtlenségek ki legyenek elégítve. Minthogy azonkívül $\alpha<1$, tehát

$$\alpha^{m_1}\beta < \alpha^{2N\log N}N = e^{-2\log N}N = \frac{1}{N}, \tag{33}$$

$$\begin{gathered} \alpha^{m_2}\beta^{m_1} \leqq (\alpha^{N\log N}\beta)^{m_1} < (e^{-\log N}N)^{m_1} = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha^{m_1+m_2+\cdots+m_{i-2}+m_i}\beta^{m_{i-1}} \leqq (\alpha^{N\log N}\beta)^{m_{i-1}} < 1 \\ (i=3, 4, \ldots, \mu) \end{gathered} \tag{34}$$

és így

$$|\varepsilon_\mu| \leqq \frac{gr}{N} = \frac{gr}{n\omega(n)}, \quad (\mu=1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

vagyis

$$|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n| \leqq \frac{gr}{\omega(n)}. \tag{36}$$

$\omega(n)$-ről azonban feltettük, hogy végtelen nagygyá lesz, találhatunk tehát oly $\bar{n}$-et, hogy ha csak

$$n > \bar{n},$$
$$\frac{g^r}{\omega(n)} < \sigma \tag{37}$$

bármily kicsiny pozitiv mennyiség legyen is σ.

Legyen most már n csakugyan nagyobb mint $\bar{n}$, és az m számok is tegyenek eleget a 32) alatti egyenlőtlenségeknek, és képezzük a

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \tag{38}$$

kifejezést. Írjuk ezt az egyszerűbb

$$g_n(x) = \Sigma c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \tag{39}$$

alakban, a hol, mint látnivaló, *a $c_\nu^{(n)}$ együtthatók csupán n-től és ν-től függő raczionális számok és úgy ezek, mint pedig az m_i számok teljesen függetlenek az a helytől, az $F^{(\nu)}(a)$ értékektől és az X tartománytól.*

Ugyanis

$$c_\nu^{(n)} = \frac{1}{n^\nu} \sum_{(\lambda)} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}, \tag{40}$$

a hol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ felveszik az összes nem negativ egészszámú értékeket, melyek a

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = \nu,$$
$$\lambda_1 \leqq m_1,\ \lambda_2 \leqq m_2, \ldots, \lambda_n \leqq m_n \tag{41}$$

egyenlőtlenségeket kielégitik. Evidens, hogy az m számok s ennek következtében a c együtthatók összesége *végtelen sokféleképen* választható.

17)-et, 36)-ot és 37)-et tekintetbe véve, világos továbbá, hogy az egész X tartományban

$$|FA(x) - g_n(x)| < \sigma, \tag{42}$$

ha csak

$$n \geqq \bar{n}.$$

Legyen most

$$G_0(x) = g_0(x),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$G_i(x) = g_i(x) - g_{i-1}(x),$$

a miből következik, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} G_i(x) = g_n(x),$$

így tehát az A csillag tetszésszerinti x helyére nézve:

$$FA(x) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i(x). \qquad 43)$$

Ez a sor egyenletesen összetartó az egész X tartományban. Ugyanis, ha csak $n > \bar{n}$, akkor bármilyen pozitiv egész számot jelentsen is p:

$$\left| FA(x) - \sum_{i=0}^{n} G_i(x) \right| < \sigma, \quad \left| FA(x) - \sum_{i=0}^{n+p} G_i(x) \right| < \sigma$$

és így

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} G_i(x) \right| < 2\sigma.$$

A $G_n(x)$ és $g_n(x)$ polinómok együtthatóit $C_\nu^{(n)}$-vel, illetve $c_\nu^{(n)}$-vel jelölvén, ezek között a

$$C_\nu^{(n)} = c_\nu^{(n)} - c_\nu^{(n-1)} \qquad 44)$$

összefüggéseket írhatjuk fel. Világos, hogy a $C_\nu^{(n)}$ értékekre vonatkozólag ugyanazt mondhatjuk, mint a mit előbb a $c_\nu^{(n)}$-kre nézve mondottunk. Továbbá ha n elég nagy, akkor választhatjuk az m_i-ket úgy, hogy

$$m_i = n^{2i}.$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ezáltal ugyanis a 32) alatti egyenlőtlenségek mindig ki lesznek elégítve.

A $g_n(x)$ polinóm ebben az esetben fölötte egyszerű alakot ölt:

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}. \qquad 45)$$

Az eddigieket most már a következő tételben foglalhatjuk össze:

Legyen A az $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a) \ldots$ értékekhez rendelt MITTAG-LEFFLER-*féle csillag és $FA(x)$ a hatványsor által definiált függvénynek az az ága, mely e csillagnak megfelel.*

Az $FA(x)$ függvényág mindig előállítható egy

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i(x)$$

alakú sorral, a melyben a $G_i(x)$ kifejezések mindegyike egy

$$G_i(x) = \sum_{(\nu)} C_\nu^{(i)} F^{(\nu)}(a) \, . \, (x-a)^\nu$$

alakú polinómot jelent. A $C_\nu^{(i)}$ együtthatók pedig meghatározott, csupán i-től és ν-től függő raczionális számok.

A

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i(x)$$

sor az A csillag bármely belső helyén összetartó; egyenletesen összetartó a csillag belsejében fekvő tetszésszerinti X tartomány helyeire nézve.

Ez MITTAG-LEFFLER alapvető fontosságú tétele. Ő tehát a maga elé tűzött problémát teljes általánosságban megoldja. Némileg azonban a módszer hiányául tudható be, hogy a szinguláris helyektől kiinduló metszeteken lévő helyekre nézve semminemű felvilágosítást nem ad. E helyek esetleg a függvény rendes helyei lehetnek és gyakran a síknak nagyon jelentékeny részét tölthetik ki. Mint később látni fogjuk, ez a hiány is pótolható, ha az egyenesvonalú csillag mellett más alakú csillagokat is alkalmazunk.

Későbbi dolgozataiban MITTAG-LEFFLER többféle stiláris változtatást tesz tételének a fogalmazásában, melyek közül az érdekesebbek egyike az, mely a *határkifejezés* (expression limite) fogalmához fűződik.

Legyen $f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ az α végtelen sok értékére nézve az $x, y, z \ldots$ változók meghatározott függvénye. Jelentse α_0 az α *értékeknek sűrűsödési helyét. Felteszszük, hogy, ha* $(x, y, z, \ldots)$ *a változók tartományának tetszésszerinti megadott helye minden pozitiv* σ *számnak, megfelel egy másik pozitiv* δ *úgy, hogy*

$$|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma,$$

ha csak

$$|\alpha' - \alpha_0| < \delta, \quad |\alpha'' - \alpha_0| < \delta.$$

Ha e feltétel teljesítve van

$$\lim_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \ldots)$$

szimbolum teljesen meghatározott jelentéssel bir.

Ez $(x, y, z, \ldots)$ *helyen a* $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ *kifejezést konvergensnek mondjuk.*

Ha $\alpha_0 = \infty$, *csak az*

$$|\alpha' - \alpha_0| < \delta, \quad |\alpha'' - \alpha_0| < \delta$$

egyenlőtlenségeket kell az

$$\left|\frac{1}{\alpha'}\right| < \delta, \quad \left|\frac{1}{\alpha''}\right| < \delta$$

egyenlőtlenségekkel helyettesíteni. Ha az $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \delta$ *egyenlőtlenség az* $(x, y, z, \ldots)$ *változók* X *tartományának minden helyén fennáll, azt mondjuk, hogy a* $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ *határkifejezés e tartományban egyenletesen konvergens.*

E megállapodás következtében tételünk most már igy fogalmazható:

Tegyük fel, hogy az $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a), \ldots$ *értékekhez tartozó hatványsor összetartási körének sugara véges és 0-tól különböző. Legyen azonkívül*

$$= \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\, \lambda_2! \ldots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

A

$$\lim_{n=\infty} g_n(x \mid a)$$

határkifejezés az A csillag belsejében fekvő tetszésszerinti tartományban egyenletesen konvergál és megadja az $FA(x)$ függvényág értékét.

Az $FA(x)$ függvényág előállítására végtelen sok más

$$h_n(x \mid a) = \Sigma c_i^{(n)} F^{(i)}(a)(x-a)^i$$

alakú polinómot is felhasználhatunk, a melyekben a $c_i^{(n)}$ együtthatók, az a és x helyek és az $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a), \ldots$ értékek megválasztásától teljesen független, előre megadható számértékek.

E tételt Mittag-Leffler után többen bebizonyították. Így elsősorban Painlevé, Leau és Borel. E bizonyítások legalább látszólag mind lényegesen egyszerűbbek az eredeti bizonyításnál. (Az ilyesmi a mathematika történetében épen nem ritka eset. Hogy más példát ne is idézzek, gondoljunk csak az *e* szám transzczendens voltának a bebizonyítására.)

Leau [23] módszere Mittag-Leffler-étől nagyon kevéssé különbözik. Borel bebizonyítására, mely a legegyszerűbb, később térünk rá. Előbb Painlevé vizsgálatait ismertetjük, a melyek önálló eredményeken kívül, Mittag-Leffler tételének a bebizonyítását is tartalmazzák. Azonkívül e vizsgálatok methodikai szempontból is rendkívül tanulságosak.

Riesz Marczell.

---

[23] Leau: Représentation des fonctions par des séries de polynômes. Bulletin de la Soc. math. de France. t. 27, 1899.

NEM FOLYTONOS JELENSÉGEK AZ ELEKTRODINAMIKÁBAN (ELEKTRONELMÉLETBEN).

(Harmadik és befejező közlemény.)

4. §. A staczionárius működés elve az elektrodinamikában.

Az imént felállított egyenletrendszer érvényessége még két megszorító feltételhez van kötve: az első az, hogy az egyenletekben szereplő összes függvények és differencziálhányadosok folytonosak legyenek, a másik az, hogy az elektromozott pontok *szabadon* mozoghassanak.

E két feltétel közül a mai elméletben szereplő *elektron*nál egyik sem teljesül; hiszen egyrészt a sűrűség és a sebesség az elektron határfelületén rohamos változást szenved, másrészt pedig az elektron legegyszerűbb alakjában *merev golyó*, melynek pontjai nem mozoghatnak szabadon, mert mozgás közben minden pillanatban bármely két pont távolságának változatlannak kell maradnia.

A közönséges mechanikából vett hasonlattal élve mondhatjuk, hogy az imént felállított egyenletek a szabad pont Newton-féle mozgásegyenletei, melyek egymagukban nem elegendők egyrészt az ütközés, másrészt a pont kényszermozgásainak leírására. Valamint a mechanikában új, általánosabb hipotézisek — a mechanikai elvek — bevonásával segítünk magunkon, ép úgy itt is törekedni fogunk oly általános elv felállítására, mely az eddig tárgyalt speciális esetben az eddigiekkel azonos eredményre vezessen, de felölelje azokat az eseteket is, melyek az eddigi tárgyalásokból ki voltak zárva, nevezetesen a nem folytonos és kényszermozgásokat.

A fizika rendszeres felépítése szempontjából örvendetes körülménynek minősithető, hogy ily általános elv felállítása épen oly integrálelv alakjában sikerül, mely a HAMILTON-féle staczionárius működés elve általánosításának mondható, a mi által ezen elv a mechanika és elektrodinamika közös alapelve lesz, minthogy úgy a diszkrét pontrendszerek, mint a folytonos eloszlású tömegek[1] mechanikájának valamint az elektrodinamikának alapegyenleteit szolgáltatja felölelve a nem folytonos és kényszermozgásokat is.

A staczionárius működés elvét legelőször K. SCHWARZSCHILD[2] alkalmazta az elektromosság folytonos áramlataira és levezette belőle a LORENTZ-féle alapegyenleteket. Tárgyalása azonban — a mint látni fogjuk — még kiegészitésre szorul, azonkívül kiterjesztendő a nem folytonos jelenségekre.

Ismeretes, hogy elektromágneses térben a térfogategységre eső elektromos energia oly pontban, a hol az elektromos tér erőssége $\mathfrak{E}$

$$E = \frac{1}{8\pi} |\mathfrak{E}|^2$$

megfelelően a térfogategységre eső mágneses energia[3]

$$H = \frac{1}{8\pi} |\mathfrak{H}|^2.$$

Az elektromos energia oly szerepet játszik, mint a potencziális energia a mechanikában, míg a mágneses energia szerepe a mozgási energiáéval hasonló; SCHWARZSCHILD fogalmazásában E és H-n kívül még az ú. n. *elektrokinetikai potencziál* szerepel; elektrokinetikai potencziál az egységnyi elektromos töltésre vonatkozólag:

[1] ZEMPLÉN G.: Folyadékokban végbemenő nem folytonos mozgásokról, Math. Phys. Lapok (1905).

[2] Göttinger Nachrichten, 1903, 126. l.

[3] L. pl. H. A. LORENTZ idézett enciklopédia czikkét.

$$K = \Phi - \frac{1}{c}\mathfrak{v}.\mathfrak{A},$$

K-nak az a tulajdonsága, hogy:

$$K_x - \frac{dK_{xt}}{dt} = -\mathfrak{F}_x$$

$$K_y - \frac{dK_{yt}}{dt} = -\mathfrak{F}_y$$

$$K_z - \frac{dK_{zt}}{dt} = -\mathfrak{F}_z$$

$\rho K d\tau$ tehát az x, y, z pontban lévő $d\tau$ térfogatelem elektromos tömegére nézve ugyanazon szerepet játsza, mint a T eleven erő a közönséges mechanikában; itt ugyanis $T_x - \frac{d}{dt} T_{xt}$, s. í. t. ugyancsak a pontra ható tömegmozgató erőket szolgáltatják. Schwarzschild tehát a Hamilton-féle integrált a következő alakban írja fel:

$$J \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int (H - E + \rho K)\, dx dy dz. \tag{24}$$

A független változók ezen integrálban x, y, z, t, a variálandó függvények egyrészt az áramlás jellemzői ρ és $\mathfrak{v}$, másrészt a tér jellemzői Φ és $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{E}$-t és $\mathfrak{H}$-t ugyanis e potencziálok segitségével fejezzük ki az említett módon.

Ezen összesen nyolcz függvény variácziója azonban nem egészen tetszőleges, mert egyrészt ρ és $\mathfrak{v}$ a folytonossági egyenletnek, másrészt Φ és $\mathfrak{A}$ a

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \Phi_t = 0 \tag{17}$$

feltételnek tartoznak eleget tenni.

Schwarzschild e két feltétel közül csak az elsőt használja, pedig e feltétel nélkül — a mint láttuk — $\mathfrak{E}$-nek és $\mathfrak{H}$-nak a potencziálokra való visszavezetése nem lesz egyértelmű; ilyenformán Schwarzschild megkapja ugyan a Maxwell-Lorentz-féle téregyenleteket, a potencziálokra vonatkozólag azonban más egyenleteket kap, melyek nem vezetnek Φ és $\mathfrak{A}$ egyértelmű meghatározásához és a melyek csak a (17)-nek *utólagos* felhasználásával mennek át a (19) és (20) alatti egyszerű egyenletekbe.

A helyes eljárás tehát az, hogy a (17) föltételt kezdettől fogva bevezetjük. A folytonossági egyenletnek mint feltételnek használása kényelmetlen, minthogy nem lineáris differencziálegyenlet.

E feltételtől egyszerűen megszabadulhatunk, ha az elektromosság EULER-féle leírásmódjáról áttérünk a LAGRANGE-félére és a x, y, z, t független változók helyére az a, b, c, t független változókat vezetjük be, a hol az a, b, c parameterek egy bizonyos elektromozott pontot jellemeznek (pl. ezen elektromozott pontnak $t=0$ időbeli koordinátái). A folytonossági egyenlet a LAGRANGE-féle változók esetén már nem differencziálegyenlet, hanem a (3) alatti véges egyenlet, melynek segitségével az egyik ismeretlen (ρ) egyszerűen kiküszöbölhető.

Az átalakitás elvégzése után J átmegy a következő integrálba:

$$J^L \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ \omega \frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} +$$

$$+ \rho_0 \Big(\Phi - \frac{1}{c} [x_t \mathfrak{A}^x + y_t \mathfrak{A}^y + z_t \mathfrak{A}^z] \Big) \Big\} \, da db dc \qquad (25)$$

és a staczionárius működés elve most már a következő alakban fogalmazható:

Az elektromos áramlás jelensége úgy megyen végbe, hogy az J^L integrál első variácziója zérussal egyenlő, ha egyrészt a teret (Φ és $\mathfrak{A}$-t mint x, y, z, t függvényeit) úgy variáljuk, hogy a (17) *egyenlet ki legyen elégítve, másrészt pedig variáljuk az áramlást magát (x, y, z-t mint a, b, c, t függvényeit). Az összes variáczióknak az integrál határain el kell tünniök.*

Látható, hogy ez nem közönséges variáczióprobléma, minthogy a Φ és $\mathfrak{A}$ variálandó függvények az x, y, z, t változóknak függvényei, melyek közül az *x, y, z maguk is variálandók;* itt tehát ismeretlen függvényeknek ugyancsak ismeretlen függvényei szerepelnek.

A

$$\Phi(x, y, z, t),\quad \mathfrak{A}^x(x, y, z, t),\quad \mathfrak{A}^y(x, y, z, t),\quad \mathfrak{A}^z(x, y, z, t),$$
$$x(a, b, c, t),\quad y(a, b, c, t),\quad z(a, b, c, t)$$

ismeretlen függvények meghatározására szolgáló összes egyenleteket megkapjuk akkor is, ha az J^L integrál összes megengedett variácziói közül kiválasztunk két csoportot, és felállítjuk ama feltételeket, melyek mellett az egy-egy csoportba tartozó összes variácziók eltünnek.

I. csoport: Oly variácziók, melyeknél az *áramlás nem változik* x, y, z-t tehát *ismert függvényeknek tekintjük,* és csak a teret variáljuk (Φ és $\mathfrak{A}$-t mint x, y, z, t függvényét).

II. csoport: Oly variácziók, melyeknél csak az áramlást variáljuk (x, y, z-t mint a, b, c, t függvényét) a teret azonban változatlannak, Φ és $\mathfrak{A}$-t adott függvényeknek tekintjük.

Feladatunk ilyenformán két közönséges variáczióproblémává esik szét — vagy mondhatjuk — az elv szétesik két elvvé, melyek közül az első a téregyenleteket, a másik a mozgásegyenleteket szolgáltatja. Ezen variáczióproblémákat most különkülön letárgyaljuk, még pedig *egyelőre teljesen folytonos jelenségekre szorítkozva,* olyanokra, melyeknél az összes fellépő függvények differencziálhányadosaikkal együtt folytonosak.

Az első csoport vizsgálatánál az áramlást nem variáljuk s igy visszatérhetünk az itt kényelmesebb EULER-féle leírásmódhoz.

I. elv. Adott elektromos áramlás mellett oly tér keletkezik, melynél az:

$$J = J^E = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int \left\{ \frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} + \rho\left(\Phi - \frac{1}{c}\,\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{A}\right)\right\} dx\,dy\,dz \qquad (26)$$

integrál variácziója zérus, ha benne Φ-t és $\mathfrak{A}$-t úgy variáljuk, hogy a (17) *alatti egyenlet ki legyen elégítve és a variácziók* *az integrál határain eltünjenek, ρ-t és $\mathfrak{v}$-t pedig adott függvényeknek tekintjük.*

Természetesen ρ-t és $\mathfrak{v}$-t oly *adott* függvényeknek kell tekintenünk, melyek a folytonossági egyenletet kielégítik.

Hagyjuk el egy pillanatra — SCHWARZSCHILDdal — a (17) föltételt, és lássuk, mily eredményre vezet az első elv ez esetben.

A variáczióprobléma LAGRANGE-féle differencziálegyenletei ez esetben, ha F-fel jelöljük J^E integranduszát:

$$F_\Phi - \frac{d}{dx} F_{\Phi_x} - \frac{d}{dy} F_{\Phi_y} - \frac{d}{dz} F_{\Phi_z} - \frac{d}{dt} F_{\Phi_t} = 0, \tag{26}$$

$$F_\mathfrak{A} - \frac{d}{dx} F_{\mathfrak{A}_x} - \frac{d}{dy} F_{\mathfrak{A}_y} - \frac{d}{dz} F_{\mathfrak{A}_z} - \frac{d}{dt} F_{\mathfrak{A}_t} = 0, \tag{27}$$

Természetesen e második egyenlet is vektormódra olvasandó, azaz $\mathfrak{A}$ mindhárom összetevőjére külön-külön áll fenn.

Elvégezve a számítást a következő egyenleteket kapjuk:

$$A \equiv \nabla^2\Phi + \frac{1}{c} \operatorname{div} \mathfrak{A}_t = -4\pi\rho, \tag{28}$$

$$\mathfrak{L} \equiv \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{A} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \Phi_t - \frac{1}{c^2} \mathfrak{A}_{t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho\mathfrak{v}. \tag{29}$$

Ezen egyenletek azonban nem függetlenek egymástól: ugyanis, a mint a számítás mutatja:

$$\operatorname{div} \mathfrak{L} + \frac{1}{c} A_t \equiv 0, \tag{30}$$

tehát ezen egyenletekből nem lehet Φ és $\mathfrak{A}$-t egyértelműen meghatározni. Igaz ugyan, hogy felhasználva a (14) és (15) egyenleteket, megkapjuk belőlük az $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$-ra vonatkozó MAXWELL-LORENTZ-féle téregyenleteket, a potencziálokra vonatkozó egyenleteket azonban nem.

Másképp áll a dolog, ha a (17) egyenletet variáczióproblémánkba, mint feltételt vezetjük be; az így előálló ú. n. *izoperimetrikus feladat* a következő *közönséges* variáczióproblémára vezethető vissza:

Mily feltételeknek tesznek eleget a Φ, $\mathfrak{A}$ és $\lambda(x, y, z, t)$ függvények, ha az

$$\overline{J^E} \equiv J^E + \int_{t_0}^{t_1} dt \int\int_{-\infty}^{+\infty}\int \lambda \left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \Phi_t\right) dx dy dz \tag{31}$$

integrál variácziója úgy tünik el, hogy Φ, $\mathfrak{A}$ és λ-t a határokon nem variáljuk?

E probléma Lagrange-féle egyenletei ugyanolyanok, mint a (26), (27) egyenleteket, csakhogy F helyére:

$$\overline{F} \equiv F + \lambda \left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \Phi_t\right)$$

irandó s ezen egyenletekhez még a következő egyenlet járul:

$$F_\lambda - \frac{d}{dx} F_{\lambda_x} - \frac{d}{dy} F_{\lambda_y} - \frac{d}{dz} F_{\lambda_z} - \frac{d}{dt} F_{\lambda_t} = F_\lambda = 0.$$

Kiszámitva:

$$A = \frac{4\pi}{c} \lambda_t - 4\pi\rho, \tag{31}$$

$$\mathfrak{L} = -4\pi \operatorname{grad} \lambda - \frac{4\pi}{c} \rho\mathfrak{v}, \tag{32}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \Phi_t = 0. \tag{17}$$

Legközelebbi feladatunk λ meghatározása: a (30) alatti azonosság és a folytonossági egyenlet λ-ra a következő egyenlet adódik:

$$\nabla^2 \lambda - \frac{1}{c^2} \lambda_{t^2} = 0. \tag{33}$$

Ez a közönséges hullámegyenlet, a melynek megoldása egyértelmű, ha pl. $t = t_0$ időpillanatban megadjuk λ-t és λ_t-t mint x, y, z függvényét.[1]

[1] L. pl. Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik. 2. k. 302. l. Vieweg, Braunschweig (1901).

Jejöljük r, ϑ, φ-vel valamely pontnak polárkoordinátáit az x, y, z pontra vonatkozólag, akkor a hullámegyenlet általános megoldása a következő:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(x, y, z, t) = \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \lambda_t (x + ct \sin\vartheta\cos\varphi,\ \ y + ct\sin\vartheta\sin\varphi,\ \ z + ct\cos\vartheta,\ 0) \sin\vartheta d\vartheta + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \lambda (x + ct \sin\vartheta\cos\varphi,\ \ y + ct\sin\vartheta\sin\varphi,\ \ z + ct\cos\vartheta,\ 0) \sin\vartheta d\vartheta \right. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

λ értéke attól fog függni, mi történt a megvizsgált $t_0 \ldots t_1$ időszakasz *előtt* rendszerünkben: ismét látható a hatások véges sebességgel való tovaterjedésének folyománya, mely szerint még az alapegyenletek alakja is attól függ, milyen a rendszer «előélete». A legegyszerűbb alakot akkor nyerjük, ha a következő föltevéssel élünk: valamikor, bármily régen létezett oly $\bar{t}=0$ időpont, melyben a rendszer nyugalomban volt ($\mathfrak{A}=$const.) s így az elektrosztatika alapegyenletei fennállottak:

$$A = \nabla^2 \Phi = -4\pi\rho,$$
$$\mathfrak{L} = 0,$$
tehát $\lambda_t = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$,

a melyben tehát

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(x, y, z, \bar{t}) = \text{const.} \\ \text{és} \quad &\lambda_t(x, y, z, \bar{t}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

E feltevés mellett (34)-ből minden további időre is azt kapjuk, hogy λ mindenütt állandó és a (31) és (32) egyenletek átmennek a (28) és (29)-be. Felhasználva most már a (17) egyenletet a potencziálokra a következő egyenleteket kapjuk:

$$\Lambda^\star \equiv \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\Phi_{t^2} = -4\pi\rho, \tag{20}$$

$$L^\star \equiv \nabla^2\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\mathfrak{A}_{t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho\mathfrak{v}. \tag{19}$$

Ezen egyenletekről most még — ugyanazon föltevéssel élve a rendszer multjára vonatkozólag — kimutatható, hogy *minden megoldásuk kielégíti a (17) egyenletet.* Ugyanis, minthogy a folytonossági egyenlet alapján:

$$\frac{1}{c}\Lambda_t^\star + \operatorname{div}\mathfrak{L}^\star =$$

$$= \nabla^2\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t\right) - \frac{1}{c^2}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t\right)_{t^2} = 0, \tag{35}$$

ha $t = t$ időpontban elektrosztatikai állapot uralkodott, tehát fennállott a

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t = 0$$

és a

$$\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t\right)_t = 0$$

egyenlet, akkor a (17) egyenlet minden további időben is fenn fog állani, mert a (17) baloldala a (33) alatti hullámegyenletnek tesz eleget.

Az *első elv* e szerint valóban a Lorentz-féle téregyenletekhez vezet, még pedig mindjárt magukra a potencziálegyenletekre.

Áttérünk most már a *második elv* tárgyalására:

II. elv. Adva lévén ama törvények, melyek szerint az elektromágneses tér az áramlástól függ, az áramlás úgy megyen végbe, hogy a

$$J^L \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \int\int_{-\infty}^{+\infty}\int \left\{ \omega \frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} + \right.$$

$$\left. + \rho_0 \left[\Phi - \frac{1}{c}\left(x_t \mathfrak{A}^x + y_t \mathfrak{A}^y + z_t \mathfrak{A}^z \right) \right] \right\} da\,db\,dc \tag{25}$$

integrál variácziója eltünik, ha benne x, y, z-t mint a, b, c, t függvényeit úgy variáljuk, hogy variáczióik az integrál határain eltünjenek: Φ-t és $\mathfrak{A}$-t pedig x, y, z, t adott függvényeinek tekintjük.

G-vel jelölve J^L integranduszát, a megfelelő LAGRANGE-féle egyenletek a következők lesznek:

$$G_x - \frac{d}{da} G_{x_a} - \frac{d}{db} G_{x_b} - \frac{d}{dc} G_{x_c} - \frac{d}{dt} G_{x_t} = 0$$

és hasonló két egyenlet y és z-re vonatkozólag.

A számitás eredménye a következő:

$$\rho_0 \left(\Phi_x - \frac{1}{c}\left[x_t \mathfrak{A}^x_x + y_t \mathfrak{A}^y_x + z_t \mathfrak{A}^z_x \right] \right) + \omega \left(\frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} \right)_x -$$

$$- \frac{d}{da}\left(\frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} \omega_{x_a} \right) - \frac{d}{db}\left(\frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} \omega_{x_b} \right) -$$

$$- \frac{d}{dc}\left(\frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} \omega_{x_c} \right) + \frac{1}{c} \rho_0 \frac{d\mathfrak{A}^x}{dt} = 0.$$

Itt:

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial x} x_a + \frac{\partial}{\partial y} y_a + \frac{\partial}{\partial z} z_a + \frac{\partial}{\partial a} \quad \text{s i. t.}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} x_t + \frac{\partial}{\partial y} y_t + \frac{\partial}{\partial z} z_t + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Tekintettel arra, hogy

$$(\omega_{x_a})_a + (\omega_{x_b})_b + (\omega_{x_c})_c = 0,$$

$$\omega_{x_a} x_a + \omega_{x_b} x_b + \omega_{x_c} x_c = \omega,$$

továbbá

$$\omega_{x_a} y_a + \omega_{x_b} y_b + \omega_{x_c} y_c = 0,$$

$$\omega_{x_a} z_a + \omega_{x_b} z_b + \omega_{x_c} z_c = 0,$$

azt kapjuk, hogy:

$$\omega(\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2)_x - \frac{d}{da}\left\{(\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2)\,\omega_{x_a}\right\} - \frac{d}{db}\left\{(\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2)\,\omega_{x_b}\right\} -$$

$$-\frac{d}{dc}\left\{(\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2)\,\omega_{x_c}\right\} = 0,$$

s így a keresett LAGRANGE-féle egyenlet:

$$\rho_0\left\{\Phi_x + \frac{1}{c}\mathfrak{A}^x_t - \frac{1}{c}\left(y_t\left\{\mathfrak{A}^y_x - \mathfrak{A}^x_y\right\} - z_t\left\{\mathfrak{A}^x_z - \mathfrak{A}^z_x\right\}\right)\right\} = 0 \quad (36)$$

és még két egyenlet y és z-re vonatkozólag. Minthogy ρ_0 nem $= 0$ (a mozgásegyenletek csak oly pontokra vonatkoznak, melyekben van valóban elektromosság) ρ_0-val végigoszthatunk s egyenleteinket vektorjelöléssel a következő alakban írhatjuk fel:

$$\operatorname{grad}\Phi + \frac{1}{c}\mathfrak{A}_t - \frac{1}{c}\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0. \quad (23)$$

De tekintettel a (14) és (15) alatti egyenletekre, ez nem egyéb, mint a

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathfrak{v}\times\mathfrak{H} = 0 \quad (13)$$

egyenlet, a szabadon mozgó elektromos pontnak előbb felállított LORENTZ-féle mozgásegyenlete.

Folytonos szabad mozgás esetén tehát a staczionárius működésnek itt adott fogalmazása valóban az összes LORENTZ-féle alapegyenletekre vezet; megvizsgáljuk legközelebb, mik az elvnek folyományai *nem folytonos* mozgásokra, különösen pedig *a merev elektron* mozgására vonatkozólag.

5. §. Az elektrodinamikai nem folytonos jelenségek elmélete térfogati töltések esetén.

a) Kinematikai összeférési föltételek.

Képzeljünk egy golyót, mely állandó térfogati sűrűségű elektromossággal megtöltve mozog a világűrben; ezen ú. n. *elektronnak* határfelülete oly felület lesz, melyen a sebesség és a sűrűség rohamos változást, szakadást szenved. Legyen A a golyó sugara $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ pedig középpontjának koordinátái (a t idő függvényei); akkor az elektron felületének egyenlete:

$$\varphi(x, y, z, t) = \{x - X(t)\}^2 + \{y - Y(t)\}^2 + \{z - Z(t)\}^2 - A^2 = 0. \quad (37)$$

A (37) tulajdonképen egy felületnek egyenlete a négyméretű térben; e felületet fogjuk *szakadási felületnek* nevezni.

De nemcsak az elektron felülete szerepelhet mint szakadási felület: ha az elektron például az által, hogy egy merev falba vagy esetleg egy másik elektronba ütközik pillanatnyi sebességváltozást szenved, akkor, ha az ütközés $t = \tau$ pillanatban történt, a szakadás helyét ismét egy felület jellemzi a négyméretű térben, még pedig a

$$\varphi(x, y, z, t) = t - \tau = 0 \quad (38)$$

négyméretű *sík*.

Általában tehát $\mathfrak{v}$ és ρ szakadása a négyméretű x, y, z, t térnek valamely felületén fekszik. Várható, hogy ha a tér valamely jellemzője (pl. $\mathfrak{E}$ vagy $\mathfrak{H}$) szakadást szenved, a szakadások ugyanott keletkeznek, a hol a $\mathfrak{v}$ és ρ szakadásai feküsznek. Mi a továbbiakban a következő módon fogunk eljárni:

Felteszszük, hogy ott, a hol $\mathfrak{v}$ és ρ szakadást szenvednek, szakadást szenved $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ is, vagy — minthogy $\mathfrak{E}$-t és $\mathfrak{H}$-t Φ-t és $\mathfrak{A}$ első differencziálhányadosai segítségével állítottuk elő — fölteszszük, hogy Φ és $\mathfrak{A}$ maguk mindenütt folytonosak, első differencziálhányadosaik azonban bizonyos négyméretű térbeli felületeken véges ugrást szenvednek és megvizsgáljuk, milyen feltételek következnek a szakadási felületre vonatkozólag a staczionárius működés elvéből, *(az első elvből)*. Ott, a hol a sűrűség és sebesség szakadást szenved, ott a mozgásegyenletek sem állanak fenn, tehát azt is meg kell vizsgálnunk, mily föltételek adódnak ki a szakadási felületre vonatkozólag a staczionárius működés elvéből (a *második elvből*), ha fölteszszük, hogy x, y, z mint a, b, c, t függvényei mindenütt folytonosak, de első differencziálhányadosaik (melyek egyrészt a sűrűséget, másrészt a sebességet jellemzik) bizonyos felületeken az a, b, c, t négyméretű térben véges szakadást szenvednek.

E föltételeket nevezzük *dinamikai összeférési feltételeknek.* Ezeken kívül fennállanak bizonyos ú. n. *kinematikai* összeférési feltételek, a melyek ama föltevésnek közvetlen folyományai, hogy a szakadások az x, y, z, t ill. a, b, c, t tereknek egy-egy felületén feküsznek.

A kinematikai összeférési feltételeket hidrodinamikai vizsgálataival kapcsolatban J. Hadamard állította fel egész általánosságban,[1] ezeket fogjuk első sorban a jelen problémára alkalmazni:

Legyen adva a ξ, η, ζ, t változóknak valamely $\Omega(\xi, \eta, \zeta, t)$ függvénye, a mely maga mindenütt folytonos, melynek első differencziálhányadosai azonban a

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta, t) = 0 \tag{39}$$

négyméretű térbeli felületen véges ugrást szenvednek,[2] akkor a kinematikai összeférési feltételek szerint

$$[\Omega_\xi] : [\Omega_\eta] : [\Omega_\zeta] : [\Omega_t] = \Psi_\xi : \Psi_\eta : \Psi_\zeta : \Psi_t \tag{40}$$

vagy:

$$[\Omega_\xi] = k\Psi_\xi, \quad [\Omega_\eta] = k\Psi_\eta, \quad [\Omega_\zeta] = k\Psi_\zeta, \quad [\Omega_t] = k\Psi_t. \tag{41}$$

Ha ξ, η, ζ valóságos térbeli koordináták és t időt jelent, akkor a (39) egyenlet azt fejezi ki, hogy a szakadás minden adott t időben egy bizonyos az idő folyamán változó valóságos felületen fekszik, vagy — a mint mondani szokás — a szakadás a *térben tovaterjed.* A sebesség, melylyel e felülel valamely pontjában normálisa irányában eltolódik

$$\theta = -\frac{\Psi_t}{\sqrt{\Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \Psi_z^2}} \tag{42}$$

a felület illetve a szakadás *tovaterjedési sebessége.*

---

[1] J. Hadamard: Leçons sur la propagation des ondes. Paris 1903.

[2] A jelölések magyarázatát l. a 2. §. végén.

Az elektromágneses tér esetében legyen általában

$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

a Φ és $\mathfrak{A}$ potencziálok első differencziálhányadosainak szakadási helye, akkor a (41) feltételek szerint:

$$[\Phi_x] = \Gamma\psi_x, \quad [\Phi_y] = \Gamma\psi_y, \quad [\Phi_z] = \Gamma\psi_z, \quad [\Phi_t] = \Gamma\psi_t, \qquad (43)$$

$$[\mathfrak{A}_x] = \mathfrak{G}\psi_x, \quad [\mathfrak{A}_y] = \mathfrak{G}\psi_y, \quad [\mathfrak{A}_z] = \mathfrak{G}\psi_z, \quad [\mathfrak{A}_t] = \mathfrak{G}\psi_t. \qquad (44)$$

Minthogy azonban a potencziálok a szakadási felület mindkét oldalán kielégítik a

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t = 0 \qquad (17)$$

egyenletet, a következő egyenlet is fennáll:

$$[\operatorname{div}\mathfrak{A}] + \frac{1}{c}[\Phi_t] = 0 \qquad (45)$$

és tekintettel (43) és (44)-re:

$$\mathfrak{G}^x\psi_x + \mathfrak{G}^y\psi_y + \mathfrak{G}^z\psi_z + \frac{1}{c}\Gamma\psi_t = 0. \qquad (46)$$

Ezen egyenlet így is irható:

$$\mathfrak{G} \,.\, \operatorname{grad}\psi + \frac{1}{c}\Gamma\psi_t = 0.$$

Ennek az egyenletnek a jelentése a következő:

Ha $\Gamma = 0$, azaz, ha a skaláris potencziál folytonos, vagy pedig $\psi_t = 0$, akkor $\mathfrak{G} \,.\, \operatorname{grad}\psi = 0$, azaz a $\mathfrak{G}$ vektor, mely a szakadást jellemzi merőleges a ψ felület normálisára, azaz benne fekszik a ψ felületben; ez esetben a szakadásról azt mondjuk, hogy *tangencziális* vagy *tranzverszális* (ha $\mathfrak{G}$ parallel grad ψ-vel, akkor azt mondjuk, hogy a szakadás *normális* vagy *longitudinális*).

A (47) egyenlet tehát azt jelenti, hogy: *Ha a skaláris potencziál differencziálhányadosai folytonosak, vagy pedig ha a szakadási felület a térben áll, akkor a vektorpotencziál differencziálhányadosaiban csak tangencziális szakadást szenvedhet.*

Végre, ha x, y, z-nek a, b, c, t szerinti differencziálhányadosai valamely

$$\varphi(a, b, c, t) = 0$$

felületen szenvednek szakadást, akkor

$$\begin{aligned} [x_a] &= \Xi\varphi_a, & [x_b] &= \Xi\varphi_b, & [x_c] &= \Xi\varphi_c, & [x_t] &= \Xi\varphi_t, \\ [y_a] &= H\varphi_a, & [y_b] &= H\varphi_b, & [y_c] &= H\varphi_c, & [y_t] &= H\varphi_t, \\ [z_a] &= Z\varphi_a, & [z_b] &= Z\varphi_b, & [z_c] &= Z\varphi_c, & [z_t] &= Z\varphi_t, \end{aligned} \tag{48}$$

b) Dinamikai összeférési föltételek.

Lássuk most már mily következtetések vonhatók a nem folytonos elektrodinamikai jelenségekre nézve a staczionárius működésnek elvéből.

Fő analitikai segédeszközünk ismét ama tétel lesz, mely az ú. n. ERDMANN-féle föltételeknek általánositása többször integrálokra vonatkozólag. E tételt alkalmaztam a hidrodinamikában fellépő nem folytonos mozgások vizsgálatánál is. Áttekinthetőség kedvéért itt közlöm a tételt újra:

Legyen adva a következő variácziófeladat:

Mily feltételek mellett tűnik el az

$$I = \iiiint G(f, g, \ldots, f_\xi, f_\eta, f_\zeta, f_t, g_\xi, \ldots)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dt$$

integrál első variácziója, $f, g, \ldots$ mindazon variácziói mellett, melyeknél az integrál határain a variácziók zérusok?

Ha $f, g, \ldots$ e feladatnak oly megoldásai, melyek maguk mindenütt folytonosak, melyeknek első differencziálhányadosai azonban a

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, t) = 0$$

négyméretű térbeli felületen véges ugrást szenvednek, akkor $f, g, \ldots$ a $\psi<0$ és $\psi>0$ tartományokban kielégítik a variácziófeladat LAGRANGE-*féle differencziálegyenleteit, $\psi=0$-ra pedig a következő összeférési egyenleteket:*

$$\begin{aligned} [G_{f_\xi}]\psi_\xi + [G_{f_\eta}]\psi_\eta + [G_{f_\zeta}]\psi_\zeta + [G_{f_t}]\psi_t &= 0, \\ [G_{g_\xi}]\psi_\xi + [G_{g_\eta}]\psi_\eta + [G_{g_\zeta}]\psi_\zeta + [G_{g_t}]\psi_t &= 0, \end{aligned} \tag{49}$$

s i. t.

Nem kell egyebet tennünk, mint e tételt a mi J^E és J^L integráljainkra alkalmaznunk és a (49) alatti egyenletek azonnal összeférési egyenleteket szolgáltatják.

I. Az elektron folytonos mozgása.

Első elv. Mily föltételeknek hódolnak Φ és $\mathfrak{A}$ differencziálhányadosai az *elektron felületén?*

$$J = J^E,\ f = \Phi,\ g = \mathfrak{A}^x, \ldots\ \xi = x,\ \eta = y,\ \zeta = z.$$

ρ, $\mathfrak{v}$ adott függvények, ψ-t a (37) egyenlet szolgáltatja.

$\psi < 0$-ra fennáll a következő rendszer:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{4\pi}{c}\lambda^{(1)} - 4\pi\rho, \\ \mathfrak{L} &= -4\pi \operatorname{grad} \lambda^{(1)} - \frac{4\pi}{c}\rho\mathfrak{v}, \\ 0 &= \operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t. \end{aligned} \tag{50}$$

$\psi > 0$-ra hasonló rendszer csak $\lambda^{(1)}$ helyére lép a $\lambda^{(2)}$ függvény.

$\psi = 0$-ra a következő dinamikai összeférési egyenletek adódnak (49)-ből.

$$\left[\Phi_x + \frac{1}{c}\mathfrak{A}^x_t\right]\psi_x + \left[\Phi_y + \frac{1}{c}\mathfrak{A}^y_t\right]\psi_y + \left[\Phi_z + \frac{1}{c}\mathfrak{A}^z_t\right]\psi_z = \frac{4\pi}{c}[\lambda]\psi_t$$

$$[\mathfrak{A}^y_x - \mathfrak{A}^x_y]\psi_y - [\mathfrak{A}^x_z - \mathfrak{A}^z_x]\psi_z + \left[\frac{1}{c}\Phi_x + \frac{1}{c^2}\mathfrak{A}^x_t\right]\psi_t = 4\pi[\lambda]\psi_x$$

$$[\mathfrak{A}^z_y - \mathfrak{A}^y_z]\psi_z - [\mathfrak{A}^y_x - \mathfrak{A}^x_y]\psi_x + \left[\frac{1}{c}\Phi_y + \frac{1}{c^2}\mathfrak{A}^y_t\right]\psi_t = 4\pi[\lambda]\psi_y$$

$$[\mathfrak{A}^x_z - \mathfrak{A}^z_x]\psi_x - [\mathfrak{A}^z_y - \mathfrak{A}^y_z]\psi_y + \left[\frac{1}{c}\Phi_z + \frac{1}{c^2}\mathfrak{A}^z_t\right]\psi_t = 4\pi[\lambda]\psi_z$$

Rövidebb alakban ezen egyenletek így írhatók fel:

$$\begin{aligned} -[\mathfrak{E}]\,.\operatorname{grad}\psi &= \frac{4\pi}{c}[\lambda]\psi_t, \\ [\mathfrak{H}] \times \operatorname{grad}\psi - \frac{1}{c}[\mathfrak{E}]\psi_t &= 4\pi[\lambda]\operatorname{grad}\psi. \end{aligned} \tag{52}$$

Ezen egyenletek jobboldalán $[\lambda]$ is szerepel, egyelőre ugyanis még nincsen jogosultsága annak, hogy λ-t az elektron felületén folytonosnak tekintsük. Azonban tekintettel az előbb levezetett kinematikai összeférési egyenletekre λ folytonossága bebizonyitható.

Ugyanis behelyettesitve (43) és (44)-ből $[\Phi]$ és $[\mathfrak{A}]$ értékeit (51)-be azt kapjuk, tekintettel (46)-ra, hogy:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\psi_t^2\right) &= \frac{4\pi}{c}[\lambda]\,\psi_t, \\ -\mathfrak{G}\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\psi_t^2\right) &= 4\pi[\lambda]\operatorname{grad}\psi. \end{aligned} \tag{53}$$

Másrészt azt kapjuk (51)-ből, ha ezen egyenleteket rendre $\frac{1}{c}\psi_t$, $-\psi_x$, $-\psi_y$, $-\psi_z$-vel szorozzuk, hogy:

$$[\lambda]\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\psi_t^2\right)=0. \tag{54}$$

Már most két eset lehetséges: vagy $[\lambda]=0$, azaz λ folytonos, vagy pedig

$$\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\psi_t^2=0. \tag{55}$$

Ez utóbbi esetben azonban (53)-ból következik, hogy $[\lambda]=0$, mivel ψ négy differencziálhányadosa közül legalább egy zérustól különböző.

λ folytonossága e szerint teljesen be van bizonyitva és *tudván, hogy λ folytonos* most ép úgy, mint az előbb tárgyalt esetben következtethetünk arra, hogy λ állandó.

Ilyenformán $\psi>0$ és $\psi<0$-ra vonatkozólag a potencziálok számára ugyanazokat az egyenleteket kaptuk, mint a folytonos áramlás esetén.

$\psi=0$-ra végre az (53) alatti dinamikai összeférési egyenletek alapján két eset lehetséges:

vagy

$$\Gamma=\mathfrak{G}^x=\mathfrak{G}^y=\mathfrak{G}^z=0,$$

azaz a potencziál első differencziálhányadosai — tehát $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ is — *folytonosak*,

vagy pedig fennáll az (55) egyenlet.

Ezen egyenletnek egyszerű a fizikai jelentése: az egyenlet így is írható:

$$\theta = \pm \frac{\psi_t}{\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}} = c,$$

a honnan látható, hogy ψ oly felület, mely az x, y, z térben állandó c sebességgel terjed tova, a fény terjedési sebességével fúvódik fel, illetve húzódik össze. E feltétel a merev elektron esetében nyilván nem teljesül s így a ṡtaczionárius működés elve alapján kimondhatjuk, *hogy a potencziálok differencziálhányadosainak szakadása nem fekhetik állandóan az elektron felületén.* E szerint *vagy folytonosak e differencziálhányadosok az elektron felületén, vagy pedig, ha valamely pillanatban szakadás lép fel ugyanott, e szakadás a fény sebességével terjed tova az elektron felületéről.*

Második elv. Vizsgáljuk most meg miként befolyásolja a mozgásegyenleteket az elektron felületén fellépő szakadás. Azonnal látható, hogy ez esetben — a LAGRANGE-féle leírási módnál — a szakadás csak látszólagos, minthogy mozgásegyenletekről csak ott beszélhetünk, a hol zérustól különböző elektromos sűrűség van jelen, tehát csak az elektron belsejében. Ha a koordinátarendszert úgy választjuk, hogy

$$X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$$

az elektron középpontjának koordinátái $t = 0$ időpontban és a, b, c, x, y, z értékeit jelentik ugyancsak $t=0$ időpontban, akkor mindama pontokban, a melyekben:

$$a^2 + b^2 + c^2 > A^2 \tag{56}$$

$\rho_0 = 0$ és t minden értékénél

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

s az J^L integrál ama része, mely az (56) tartományra vonatkozik állandó s így a variálásnál egyszerűen elhagyható; az integrál hátralévő részében, mely az elektron belsejére vonatkozik, már csak folytonos mennyiségek szerepelnek.

A második elv tehát nem szolgáltat ebben az esetben dinamikai összeférési föltételeket.

Az elektron mozgásegyenleteit most már megkaphatjuk, ha az J^L-nek az elektron belsejére vonatkozó részében a variácziókat ama feltételnek vetjük alá, hogy az *elektron merev rendszer*, hogy tehát a deformácziómennyiségek eltünnek:

$$\begin{aligned} &x_a-1=0, \quad y_b-1=0, \quad z_c-1=0, \\ &y_c+z_b=0, \quad z_a+x_c=0, \quad x_b-y_a=0. \end{aligned} \tag{57}$$

Az így keletkező izoperimetrikus feladat a következő integrálra vonatkozó közönséges variácziófeladattal egyenértékű:

$$\begin{aligned} J^L = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{a^2+b^2+c^2<A^2} &\Big\{ \frac{\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2}{8\pi}\,\omega + \rho_0\,(\Phi - x_t\mathfrak{A}^x - y_t\mathfrak{A}^y - z_t\mathfrak{A}^z) + \\ &+ \Xi^a(x_a-1) + H^b(y_b-1) + Z^c(z_c-1) + \\ &+ H^c(y_c+z_b) + Z^a(z_a+x_c) + \Xi^b(x_b+y_a) \Big\}\, da\,db\,dc, \end{aligned} \tag{58}$$

a hol

$$\Xi^a,\ H^b,\ Z^c,\ H^c=Z^b,\ Z^a=\Xi^c,\ \Xi^b=H^a$$

a, b, c, t-nek szintén ismeretlen függvényei, az *elektron merevségétől származó reakczióerők*:

Az elektron mozgásegyenletei tehát:

$$\begin{aligned} \rho_0 \Big\{ \Phi_x + \frac{1}{c}\,\mathfrak{A}^x_t - \frac{1}{c}\,\big[y_t(\mathfrak{A}^y_x-\mathfrak{A}^x_y) - z_t(\mathfrak{A}^x_z-\mathfrak{A}^z_x)\big]\Big\} - \\ - \Xi^a_a - \Xi^b_b - \Xi^c_c = 0 \quad \text{s i. t.} \end{aligned} \tag{59}$$

és az (57) alatti egyenletek.

Az elektron mozgásegyenletei tehát ugyanoly alakúak, mint valamely rugalmas test egyensúlyi föltételei, melyre a

$$\rho_0 F = \rho_0 \Big(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,\mathfrak{v}\times\mathfrak{H} \Big)$$

külső erő, és a Ξ^a, H^b, ..., Ξ^b feszültségi összetevők hatnak.

II. Az elektron ütközése.

Tegyük föl, hogy bizonyos $t = \tau$ időpontban az elektron sebessége rohamos változást szenved úgy, mint mikor valamely merev golyó merev falba ütközik. Mily feltételek adódnak ki a stacziónárius működés elvéből az ütközés pillanatára, és melyek az ütközés előtt és után a tér- és mozgásegyenletek? *Első elv.* A tárgyalás ugyanaz, mint előbb, csakhogy most két szakadási felületünk van; az elektron felülete (37) és a következő «sík»

$$\psi(x, y, z, t) \equiv t - \tau = 0. \tag{38}$$

Az $\overline{I^E}$ integrált négy részre kell bontanunk ama négy tartománynak megfelelően, a melyre a két szakadási felület a négyméretű teret felosztja.

A számítás eredménye ugyanaz, mint előbb: λ folytonos és így a téregyenletek ugyanazok, mint a folytonos áramlásnál $t<\tau$ és $t>\tau$-ra vonatkozólag; az összeférési feltételek az elektron felületén ugyanazok, mint előbb, az ütközés pillanatában pedig:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\,\psi_t^2\right) &= -\frac{1}{c^2}\Gamma = 0, \\ \mathfrak{G}\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\,\psi_t\right) &= -\frac{1}{c^2}\mathfrak{G} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Tehát az elektron ütközésénél a potencziálok első differencziálhányadosai tehát az elektromos és mágneses tér erőssége *folytonos.*

Ezen eredményt ime a stacziónárius működés elvéből vezettük le, míg az eddigi szerzők, pl. P. HERTZ idézett értekezésében egyszerűen indokolás nélkül feltételezik a folytonosságot.

Második elv. Meg kell vizsgálnunk, mikép alakulnak a mozgásegyenletek ütközés előtt és után és mik lesznek a feltételek a

$$\psi(a, b, c, t) \equiv t - \tau = 0 \tag{61}$$

szakadási felületen.

Az $\overline{I^L}$ integrálból indulunk ki; ütközés előtt és után megint az (59) alatti egyenletek fognak fennállani, az ütközés pillanatában analitikai segédtételünket alkalmazva

$$(I=I^L,\ f=x,\ g=y,\ h=z,\ i=H^a,\ldots,\ \xi=a,\ \eta=b,\ \zeta=c,\ \psi=t-\tau)$$

azt kapjuk, hogy:

$$[\mathfrak{A}^x]=[\mathfrak{A}^y]=[\mathfrak{A}^z]=0$$

tehát a második elv ismét nem szolgáltat semmiféle külön feltételt.

Összefoglalásképen tehát kimondhatjuk a térfogati töltés esetére a következő két tételt:

I. *Az elektronnak tetszőleges — folytonos avagy nem folytonos — mozgása esetén a potencziálok első differencziálhányadosainak folytonossága összefér a staczionárius működés elvével.*

II. *Ugyane differencziálhányadosoknak valamely felületen keletkező szakadása fénysebességgel terjed tova a térben.*

III. Elektromágneses hullámok.

Az elektromos és mágneses tér erősségének a térben tovaterjedő szakadásait *elektromágneses hullámoknak* nevezik. E hullámokra nézve összeférési föltételeink a következő eredményeket szolgáltatják:

1. A hullám tovaterjedési sebessége egyenlő a fény terjedési sebességével.

2. A hullámfelületen $\big(\psi(x,y,z,t)=0\text{-on}\big)$

$$[\mathfrak{E}]\,.\,\mathrm{grad}\,\psi=0, \tag{62}$$

$$[\mathfrak{H}]\times\mathrm{grad}\,\psi=\frac{1}{c}\,[\mathfrak{E}]\,\psi_t. \tag{63}$$

A (62) egyenlet különben a (63) alattiaknak folyománya, mivel ha a (63) egyenleteit rendre ψ_x, ψ_y, ψ_z-vel szorozzuk és összeadjuk, megkapjuk a (62)-t.

Ha $\mathfrak{n}$-nel jelöljük a felületre merőleges egységnyi hosszúságú vektort, akkor, minthogy

$$\frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}}=c \tag{64}$$

a (63) így írható:

$$[\mathfrak{H}]\times\mathfrak{n}=[\mathfrak{E}]. \tag{65}$$

A (65) azt mondja, hogy az elektromos térerősség szakadása merőleges egyrészt a felület normálisára (tehát *transzverzális*), másrészt pedig a mágneses tér erősségének szakadására. Ez utóbbinak azonban nem kell szükségképen transzverzálisnak lenni, de transzverzális lehet s akkor az egész elektromágneses tér szakadása tisztán transzverzális, mint például a fényhullámok homlokán.

Válaszszuk z tengelynek a hullámfelület normálisát, akkor a (65) rendszer a következő lesz:

$$\begin{aligned}-[\mathfrak{H}^y]&=[\mathfrak{E}^x],\\ [\mathfrak{H}^x]&=[\mathfrak{E}^y],\\ 0&=[\mathfrak{E}^z].\end{aligned} \tag{66}$$

Minthogy $[\mathfrak{H}^z]$ még tetszőlegesen választható, világos, hogy oly elektromágneses hullám is lehetséges, a melyben csak az elektromos tér erőssége szenved transzverzális szakadást, a mágneses tér szakadásának pedig longitudinális összetevője is van.

6. §. Az elektrodinamikai nem folytonos jelenségek elmélete felületi töltések esetén.

Az elektronelmélet összes számításait két különböző feltevés mellett szokás elvégezni; vagy felteszszük az elektronról, hogy töltése egész térfogatában véges térfogati sűrűséggel oszlik el — ez az előbbi §§-ban tárgyalt eset — vagy pedig fölteszszük, hogy a töltés csak az elektron felületét borítja be véges *felületi* sűrűséggel.

Mi is még megvizsgáljuk mily eredményre vezet a staczionárius működés elve a véges felületi töltés esetén: föltevésünk az analitikai fogalmazásban úgy nyilvánul, hogy ρ_0-t és ρ-t a térfogati sűrűséget mindenütt zérusnak tekintjük és integráljainkhoz új felületi integrálokat csatolunk, melyek az elektromossággal borított felületre terjesztendők ki. Egyébként most σdf (σ = felületi sűrűség, df = felületelem) lesz az elektromosság mennyisége a df-en s ez ugyanazt a szerepet fogja játszani, mint az előbbi tárgyalásainkban $\rho d\tau$.

Vizsgáljuk meg a *tér* viselkedését a felületi sűrűséggel beborított elektron folytonos mozgásánál *első elvünk* alapján.

A variálandó integrál a következő:

$$\overline{\overline{I^E}} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} + \lambda\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\Phi_t\right)\right] dx\,dy\,dz + \right.$$

$$\left. + \int\int_{\psi=0} \sigma\left(\Phi - \frac{1}{c}\mathfrak{v}.\mathfrak{A}\right) df \right\} \tag{67}$$

$\psi=0$ az elektron felületének egyenlete a t időpontban.

Az elektromos áramlás sebessége $\mathfrak{v}$, minthogy az elektromosság a $\psi=0$ felülethez van kötve, a

$$\psi_t + \psi_x x_t + \psi_y y_t + \psi_z \psi_t \equiv \psi_t + \operatorname{grad}\psi.\mathfrak{v} = 0 \tag{68}$$

egyenletet tartozik kielégiteni minden pontban. Minthogy az első elv alkalmazásánál az áramlást megadottnak tekintjük, $\mathfrak{v}$-ról fölteszszük, hogy a (68) egyenletet kielégiti.

A szakadási felületünk ismét a $\psi=0$ felület.

Analitikai segédtételünket most nem alkalmazhatjuk közvetlenül, minthogy a variálandó integrál most egy négyszeres és háromszoros integrál összege és így kissé vissza kell térnünk e segédtétel levezetésére.

$$\overline{\overline{I^E}} = I_4 + I_3,$$

a hol I_4 a négyszeres, I_3 a háromszoros integrált jelenti.

$$\overline{\overline{\delta I^E}} = \delta I_4 + I_3.$$

I_4 integrálási tartományát a szakadási felület két részre bontja; e két részben minden folytonos. Ennek megfelelően

$$I_4 = I_4^{(1)} + I_4^{(2)}.$$

δI_4-et képezve külön-külön e két tartományra a rendes átalakítást elvégezzük úgy, hogy δI_4 mindkét része egy-egy négyszeres és egy-egy háromszoros integrál összege lesz, mely utóbbiak a *szakadási felületre terjesztendők ki;* tehát könnyen érthető jelölésben:

$$\delta I_4^{(1)} = \delta I_{44}^{(1)} + \delta I_{43}^{(1)},$$
$$\delta I_4^{(2)} = \delta I_{44}^{(2)} + \delta I_{43}^{(2)}.$$

δI_4 ezen átalakítása ugyanúgy történik, mint segédtételünk levezetésénél s az eredmény, ha G_4-vel jelöljük I_4 integranduszát a következő:

$$\delta I_4 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left(\left\{ G_{4_\Phi} - \frac{d}{dx} G_{4_{\Phi_x}} - \cdots - \frac{d}{dt} G_{4_{\Phi_y}} \right\} \delta\Phi + \right.\right.$$
$$\left. + \left\{ G_{4_{\mathfrak{A}^x}} - \frac{d}{dx} G_{4_{\mathfrak{A}^x_x}} - \cdots - \frac{d}{dt} G_{4_{\mathfrak{A}^x_t}} \right\} \delta\mathfrak{A}^x + \cdots \right) dx\,dy\,dz +$$
$$+ \int\!\!\int_{\varphi=0} \left(\left\{ \left[G_{4_{\Phi_x}} \right] \overline{\varphi}_x + \left[G_{4_{\Phi_y}} \right] \overline{\varphi}_y + \left[G_{4_{\Phi_z}} \right] \overline{\varphi}_z + \left[G_{4_{\Phi_t}} \right] \overline{\varphi}_t \right\} \delta\Phi + \right.$$
$$\left. + \{\cdots\} \delta\mathfrak{A}^x + \cdots \right) df. \tag{69}$$

Itt $\overline{\varphi}_x = \dfrac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}$, s i. t.

δI_3 a rendes módon képzendő; G_3 legyen I_3 integrandusza:

$$\delta I_3 = \int_{t_0}^{t_1} dt \int\!\!\int (G_{3_\Phi} \delta\Phi + G_{3_{\mathfrak{A}^x}} \delta\mathfrak{A}^x + \cdots)\, df. \tag{70}$$

$\delta I_4 + \delta I_3$-ban kell most $\delta\Phi$, $\delta\mathfrak{A}^x, \ldots$ együtthatóit külön a négyszeres és külön a háromszoros integrálokban zérussal egyenlővé tennünk: a négyszeres integrálból nyert egyenletek vonatkoznak a folytonos részekre, a háromszoros integrálokból pedig a dinamikai összeférési egyenleteket nyerjük a szakadási felületen.

A téregyenletek ugyanazok, mint előbb (l. az (50) alatti egyenleteket) az összeférési egyenletek pedig a következők:

$$
\begin{aligned}
&-[\mathfrak{E}]\,.\,\mathfrak{n} = \frac{4\pi}{c}[\lambda]\,\theta + 4\pi\sigma,\\
&[\mathfrak{H}]\times\mathfrak{n} - \frac{1}{c}[\mathfrak{E}]\,\theta = 4\pi[\lambda]\,\mathfrak{n} - \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{v}.
\end{aligned}
\qquad (71)
$$

$\theta = \overline{\psi}_t$ a $\psi = 0$ felület tovaterjedési sebessége.

Tekintettel a (43), (44) és (46) alatti kinematikai összeférési egyenletekre, azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\Gamma\left(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\,\psi_t\right)=\frac{4\pi}{c}[\lambda]\,\psi_t+4\pi\sigma\sqrt{\psi_n^2+\psi_y^2+\psi_z^2}\\
&-\mathfrak{G}\left(\psi_x+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\,\psi_t^2\right)=4\pi[\lambda]\,\mathrm{grad}\,\psi-\frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{v}\sqrt{\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2}
\end{aligned}
$$

Legközelebbi feladatunk ismét λ folytonosságának megvizsgálása:

A (72) rendszer egyenleteit rendre $\frac{1}{c}\psi_t$, $-\psi_x$, $-\psi_y$, $-\psi_z$-vel szorozzuk és összeadjuk, azt kapjuk, tekintettel (46) és (68)-ra, hogy:

$$
[\lambda]\left(\psi_x^2+\psi_y+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\,\psi_t^2\right)=0. \qquad (73)
$$

Most már megint két eset lehetséges: vagy $[\lambda]=0$, vagy a (73) baloldalán a második tényező zérus. Ez utóbbi eset ismét az, midőn a $\psi=0$ felület a fény sebességével fúvódik fel, vagy huzódik össze. Ez természetesen a merev elektron esetén nem következik be s így λ folytonos, tehát a téregyenletek ugyanazok, mint a térfogati töltésű elektronnál vagy az elektromosságnak teljesen folytonos áramlásánál.

Abban az egy kivételes esetben, midőn σ felületi sűrűséggel boritott felület fénysebességgel fuvódik fel vagy huzódik össze λ *nem folytonos* és így ebben az esetben nem vagyunk feljogosítva arra, hogy λ-t a téregyenletekből kihagyjuk.

A (72)-ből $[\lambda]$ ki is számitható ez esetben; az eredmény

$$
[\lambda] = -\sigma.
$$

Ettől az egészen kivételes esettől eltekintve, bármely felületi sűrűséggel beborított felület mozgásánál a téregyenletek a felületen kívül a következők lesznek:

$$\varDelta^2\Phi - \frac{1}{c^2}\Phi_{t^2} = 0, \tag{74}$$

$$\varDelta^2\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\mathfrak{A}_{t^2} = 0, \tag{75}$$

minthogy ρ mindenütt $= 0$.

A (71) alatti dinamikai összeférési egyenletek szolgáltatják ezen egyenletek integrálásához szükséges határfeltételek egy részét, ha bennük $[\lambda]$ helyére zérust írunk.

Tehát $$-[\mathfrak{E}]\,.\,\mathfrak{n} = 4\pi\sigma, \tag{76}$$

$$[\mathfrak{H}] \times \mathfrak{n} = \frac{1}{c}[\mathfrak{E}]\,\theta - \frac{4\pi}{c}\mathfrak{v}\sigma. \tag{77}$$

Ezek szerint a felületi sűrűséggel beborított felületeken a potencziálok differencziálhányadosai, s így a tér erősségét jellemző $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ mennyiségek már nem folytonosak úgy, mint a térfogati töltésű elektronnál, hanem szakadást szenvednek még pedig olyképen, hogy — (76) szerint — az elektromos tér erősségének szakadását a felületi sűrűség és a felület alakja, a mágneses tér erősségének szakadását ezen adatokon kívül a felület mozgása határozza meg.

A (76) alatti egyenlet különben — az elektrosztatika esetére speczializálva — a felületi hatók potencziálelméletének jól ismert tételét szolgáltatja: az elektrosztatika esetén ugyanis $\mathfrak{A} = \text{const.}$ és $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi$, tehát

$$[\mathfrak{E}]\,.\,\mathfrak{n} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_2,$$

a hol n a $\psi = 0$ felület normálisát jelenti s az 1 és 2 indexek ellentett irányba való differencziálásokat jelentenek; a (76) tehát ez esetben nem egyéb, mint a

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) = 4\pi\sigma \quad \text{egyenlőség.}$$

A *második elv* ebben az esetben sem szolgáltat külön összeférési feltételeket.

Felületi sűrűséggel beboritott elektron *ütközésénél* ($\psi \equiv t-\tau$) megint azt kapjuk, hogy az elektron felületén kívül mindenütt fennállanak a (72) egyenletek, a melyekben azonban most már, minthogy nem az elektron felületére vonatkoznak $\sigma=0$ s így, mivel $\psi=t-\tau=0$ sem elégiti ki a

$$\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2-\frac{1}{c^2}\psi_t^2=0$$

egyenletet $[\lambda]=0$ és

$$\Gamma=0, \quad \mathfrak{G}=0,$$

tehát

$$[\mathfrak{E}]=[\mathfrak{H}]=0.$$

Az ütközésnél tehát az elektron felületén kívül ismét folytonosak a potencziálok első differencziálhányadosai.

A *második elv* az elektron felületére nézve ismét az azonosan kielégített

$$[\mathfrak{A}^x]=[\mathfrak{A}^y]=[\mathfrak{A}^z]=0$$

feltételeket szolgáltatja.

7. §. Összefoglalás.

Összefoglalásképen kimondhatjuk, hogy térfogati töltésű elektronnak bármily — folytonos vagy nem folytonos — mozgásánál a tér jellemzőinek $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$-nak folytonossága nem ellenkezik a staczionárius működés elvével; felületi töltés esetén azonban $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{H}$ az elektron felületén nem folytonosak és a staczionárius működés elve e szakadásokra nézve oly törvényeket állít fel, melyek a jól ismert elektrosztatikai törvényeknek általánosításai.

Ha bármily úton valamely felületen a potencziálok első differencziálhányadosainak szakadása következik be, a staczionárius működés elve alapján a szakadás mint elektromágneses hullám a fény terjedési sebességével terjed a térben tova. E hullámokon az elektromos tér erőssége *mindig transzver-*

szális szakadást szenved, míg a mágneses tér erősségének szakadása merőleges az elektromos tér erősségének szakadására, de *nem szükségképen transzverszális.*

Természetes, hogy ily, részben transzverszális hullámoknak egészen más fizikai jelenségekben kell nyilvánulni, mint a tiszta transzverszális hullámoknak és nincsen kizárva, hogy a Röntgensugarak, melyeket eddig semmiféle ismert elektromágneses jelenségre nem lehetett visszavezetni, ily részben transzverszális hullámokban lelik magyarázatukat. Eddig is megszoktuk, hogy a Röntgensugarakat elektromágneses *impulzusokkal*, vagyis *nem folytonos elektromágneses jelenségekkel* magyarázzuk; ime szigorúan levezettük egy általános fizikai elvből azt, hogy ezen impulzusok — akár részben, akár tisztán transzverszálisak — afénysebességgel terjednek tova; megemlítendő ezen eredménynyel kapcsolatban, hogy E. MARX az 1905 év szeptemberében a német orvosok és természetbúvárok meráni összejövetelén oly mérésekről számol be, melyekkel kisérleti úton kimutatta, hogy a Röntgensugarak a fény sebességével terjednek tova.

Zemplén Győző.

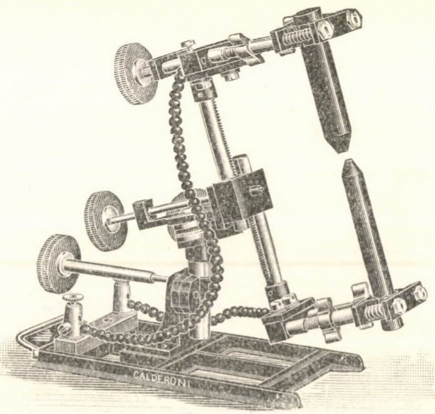
Vetitőkészülék «Calderoni II»

Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, azonban a lámpatartó szekrény acéllemezek helyett feketére égetett 3 mm. vastag sárgaréz-lemezekből van készitve és magnálium hütőbordákkal van ellátva. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

Villamos ívlámpa



legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480 cm. négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

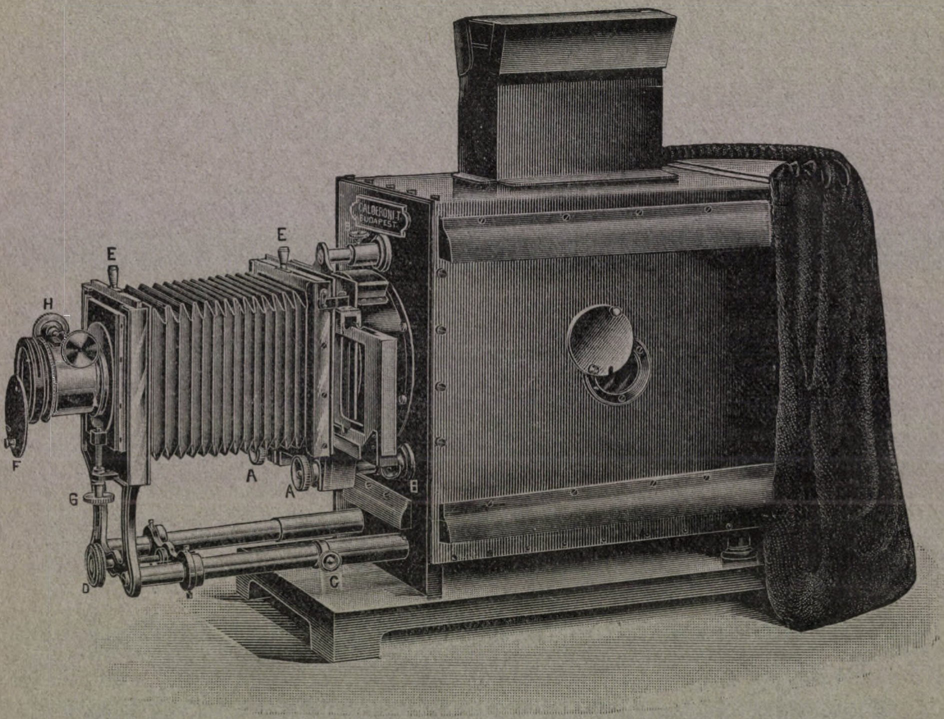
Részletes árjegyzék a jövő tanévben fog megjelenni.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kis hid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék legjobb minőségü aczéllemezekből van készitve, asbestbéléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 11 cm. átm. kettős világitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van felfüggesztve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. A készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.**—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHATODIK ÉVFOLYAM

II. FÜZET 1907 FEBRUÁRIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1907.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhatodik társulati év 1907 január 1-jen kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czimére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czimére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

KIVONAT LOEWY ALFRED FREIBURGI EGYET. TANÁR

RADOS GUSZTÁVHOZ INTÉZETT LEVELÉBŐL.

1. A «*Mathem. u. Naturw. Berichte aus Ungarn*» XXIII. kötetének (1905) 200. lapján[1] egyik tanítványa, VISNYA ALADÁR úr, a homogén lineár helyettesítésekből alkotott véges csoportok szétbonthatóságának egyértelműségét bizonyítja be. A bebizonyítást előbb a ineár homogén differencziálegyenletek raczionalis tartományaira vonatkozó vizsgálataimra alapítja, majd így folytatja: «De kivánatos lesz természetesen tételünket tisztán formális algebrai úton is bebizonyítani». A kérdéses tétel kiadódik FROBENIUSnak mélyreható vizsgálataiból, melyek a homogén lineár helyettesítésekből alkotott véges csoport charakteristikáira *(Gruppencharaktere)* vonatkoznak. Speczialis esete továbbá még amaz általános tételnek is, a melyet a «*Transactions of the American Math. Society*»-ben (IV. köt. 44. lap, 1903 január) bizonyítottam be. E speczialis tételt, a homogén lineár helyettesítések véges csoportjaira vonatkozólag, az idézett helyen a 2. §-ban külön ki is emeltem. V. ö. még J. SCHUR: «Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere». (*Sitzungsb. der Preussischen Akademie der Wiss.* 1905. évf. 419. lap), FROBENIUS und SCHUR: «Über die Aequivalenz der Gruppen linearer Substitutionen» (ugyanott 1906. évf. 216. lap).

2. VISNYA ALADÁR úr első czikkének eredménye így hangzik: «A homogén lineár helyettesítések valamely véges csoportja

[1] A közlemény, melyre e megjegyzések vonatkoznak kivánatos fordítása az e lapok XII. kötetének (1903.) 201—217. és 353—371. lapjain megjelent czikkeknek, melyeket VISNYA úr már 1902. folyamában nyujtott be a Math. és Phys. Lapok szerkesztőségének. *Szerk.*

akkor és csakis akkor szétbontható, ha egy semidefinit HERMITE-féle alakot változatlanul hagy». Ez eredményhez legyen szabad a következő megjegyzéseket fűznöm: Könnyű megmutatni: Ha a homogén lineár helyettesítéseknek (melyeknek determinánsa nem zérus) bármiféle (véges vagy végtelen) csoportja *bármilyen* eltünő determinánsú HERMITE-féle alakot önönmagába visz át, akkor a csoport reducibilis, vagyis a

$$\begin{matrix} G_{11} & 0 \\ G_{12} & G_{22} \end{matrix}$$

alakra transformálható. Ha a homogén lineár helyettesítések valamely csoportjához két invariáns HERMITE-féle alak tartozik, akkor az ezekből képezett alaksereg és ebben egy eltünő determinánsú HERMITE-féle alak is invariáns és így a csoport reducibilis. A homogén lineár helyettesítések minden irreducibilis (véges vagy végtelen) csoportjához tehát, ha egyáltalában van ilyen invariánsuk, csak egy, állandó faktoroktól eltekintve egyértelműen meghatározott, HERMITE-féle alak tartozik. A «*Transactions of the American Math. Society*» VI. kötetének (1905) 510—513. lapjain megmutattam, hogy a homogén lineár helyettesítések minden csoportja, mely valamely definit HERMITE-féle alakot változatlanul hagy, vagy irreducibilis vagy szétbontható és az utóbbi esetben változatlanul hagy egy semidefinit HERMITE-féle alakot is.

Ebből következik, hogy a homogén lineár helyettesítések bármely (véges vagy végtelen) csoportja, melynél valamely, definit HERMITE-féle alak invariáns marad, akkor és csak akkor reducibilis, ha egyúttal egy semidefinit HERMITE-féle alakot is változatlanul hagy; ekkor a csoport egyszersmind szétbontható is.

Ama csoportok közé, melyeknél egy definit HERMITE-féle alak változatlanul marad, tartoznak egy MOOREtól és tőlem eredő tétel[1] szerint a véges csoportok is.

---

* Ismertetését lásd *Math. és Phys. Lapok* XII. köt. 205—206. lapján.
Szerk.

3. A második czikkben tárgyalt kérdésre vonatkozólag BURNSIDE vizsgálataira lehet utalni (*Acta Mathematica* 28. köt. 1904. 377. lap), a hol a szerző által kitűzött feladat minden megszorítás nélkül el van intézve. A tételt a következő általánosabb alakban lehet fogalmazni, mely BURNSIDE eredményét speciális esetként magában foglalja: Ha a homogén lineár helyettesítések valamely (véges vagy végtelen) csoportja teljesen reducibilis és oly alakban van felírva, hogy irreducibilis alkotórészei evidencziába lépnek és ha továbbá felteszszük, hogy ezen irreducibilis alkotórészek mindegyike olyan, hogy külön-külön egy-egy HERMITE-féle alakot önönmagába visz át, akkor, ha az irreducibilis alkotórészek között nincsenek egymáshoz hasonlók, az egész csoport HERMITE-féle invariánsainak összességét az egyes alkotórészekhez, feltétel szerint, tartozó HERMITE-féle részletalakoknak állandó együtthatókkal képezett lineár összetétele adja meg.

Legyen általánosabban G olyan teljesen reducibilis csoport, a melynek alkotórészei között hasonlók is lehetnek. Minden alkotórész, feltétel szerint olyan legyen, hogy egy-egy HERMITE-féle alakot önönmagába transzformál. A teljesen reducibilis G csoport mindig oly alakra hozható, hogy az egymáshoz hasonló alkatrészek teljesen egyező alakban jelenjenek meg. Emez átalakítás megejtése után a G alkotórészei a következők legyenek: $\mathfrak{A}^{(1)}$ és pedig ν_1-szeresen, $\mathfrak{A}^{(2)}$ ν_2-szörösen, s i. t. $\mathfrak{A}^{(i)}$ ν_i-szeresen, de úgy, hogy $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}^{(i)}$ között hasonlók már nincsenek. Az $\mathfrak{A}^{(1)}$ l változót tartalmazzon. A G csoport azon változói, a melyek a ν_1-szeresen veendő $\mathfrak{A}^{(1)}$-ben szerepelnek, a következőképen legyenek jelölve:

$$\begin{array}{c} x_1^{(1)}, \; x_2^{(1)}, \; \dots, \; x_l^{(1)} \\ x_1^{(2)}, \; x_2^{(2)}, \; \dots, \; x_l^{(2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^{(\nu_1)}, \; x_2^{(\nu_1)}, \; \dots, \; x_l^{(\nu_1)} \end{array}$$

G-ben tehát az $\mathfrak{A}^{(1)}$ rendre más $x^{(1)}$, ill. $x^{(2)}, \dots$, illetőleg $x^{(\nu_1)}$ rendszerekben felírva jelenik meg ν_1-szeresen. Az $x^{(1)}$ rendszerben felírt $\mathfrak{A}^{(1)}$ feltétel szerint, önönmagába vigye át a

$$\sum_{s=1}^{s=l} \sum_{t=1}^{t=l} a_{st} x_s^{(1)} \bar{x}_t^{(1)}$$

HERMITE-féle alakot, a hol $\bar{x}$ a konjugált imaginarius változókat jelenti. Ezt a HERMITE-féle alakot jelöljük f_1-gyel. Az $x^{(2)}$ rendszerben felírt $\mathfrak{A}^{(1)}$ csoportnál a

$$\sum_{s=1}^{s=l} \sum_{t=1}^{t=l} a_{st} x_s^{(2)} \bar{x}_t^{(2)}$$

HERMITE-féle alak lesz invariáns, ez f_2-vel legyen jelölve; és így tovább az $x^{(\nu_1)}$ rendszerben felírt $\mathfrak{A}^{(1)}$-nél az

$$f_{\nu_1} = \sum_{s=1}^{s=l} \sum_{t=1}^{t=l} a_{st} x_s^{(\nu_1)} \bar{x}_t^{(\nu_1)}$$

HERMITE-féle alak lesz invariáns.

Definiáljuk a következő kifejezéseket:

$$f(x^{(\lambda)}; \bar{x}^{(\varkappa)}) = \sum_{s=1}^{s=l} \sum_{t=1}^{t=l} a_{st} x_s^{(\lambda)} \bar{x}_t^{(\varkappa)}$$

$$f(x^{(\varkappa)}; \bar{x}^{(\lambda)}) = \sum_{s=1}^{s=l} \sum_{t=1}^{t=l} a_{st} x_s^{(\varkappa)} \bar{x}_t^{(\lambda)}$$

és képezzük belőlük az

$$f(x^{(\lambda)}; \bar{x}^{(\varkappa)}) + f(x^{(\varkappa)}; \bar{x}^{(\lambda)}) = F_{\lambda\varkappa}$$

és

$$\sqrt{-1}\,[f(x^{(\varkappa)}; \bar{x}^{(\lambda)}) - f(x^{(\lambda)}; \bar{x}^{(\varkappa)})] = H_{\lambda\varkappa}$$

HERMITE-féle alakokat. E két, $F_{\lambda\varkappa}$ és $H_{\lambda\varkappa}$ alakot az $1, 2, \ldots, \nu_1$ összes kettes kombináczióira vonatkozólag kell képezni, a mi által $\nu_1(\nu_1 - 1)$ HERMITE-féle alakot nyerünk, tehát az $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu_1}$-gyel együtt összesen ν_1^2-et.

Ehhez hasonlóan képezzünk az $\mathfrak{A}^{(2)}$-nek megfelelően ν_2^2 számú HERMITE-féle alakot, s í. t. az $\mathfrak{A}^{(i)}$-nek és az $\mathfrak{A}^{(i)}$-hez hasonló csoportoknak megfelelően ν_i^2 számút. E $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_i^2$ HERMITE-féle alak homogén lineár kombinácziói adják a G-hez tartozó invariáns HERMITE-féle alakok összességét.

Lényeges feltétele a tételnek, hogy G teljesen reducibilis és hogy *minden* alkotórészhez egy-egy invariáns HERMITE-féle alak tartozik. (Fordította: *Visnya Aladár.*)

MEGJEGYZÉSEK A FENTEBBI LEVÉLHEZ.

Miután mindenekelőtt e helyen is köszönetet mondok RADOS tanár úrnak ama szives figyelméért, hogy e levelet velem közölve engem bizott meg a fordításával és esetleges megjegyzéstételre is felszólított, megjegyzéseimben röviden csak a következőkre óhajtok szorítkozni: 1. A LOEWY úr által idézett dolgozatok kivétel nélkül újabb keletűek, mint doktori értekezésem, a mely mint e czikkek első lenyomata még *1902 szeptemberében* megjelent. 2. A német fordítás különösen az e téren folyó tevékeny kutatás mellett tényleg elkésve jelent meg 1905-ben, úgy, hogy eredetileg a *Berichte*knek az 1905-ikivel egyidejűleg készülő 1903-iki kötetébe volt szánva, a honnan azonban az utolsó perczben helyszűke miatt kiszorult. Az újabb eredményeket a fordításnál azért nem vehettem figyelembe, mert itt a vidéken úgyszólván minden irodalmi segédeszköz hijján vagyok. *V. A.*

A NEMZETKÖZI SEGÉDNYELV.

A tizenkilenczedik századnak összes haladásai között talán a legfontosabbak, legalább a legszembeszökőbbek azok, melyeket a közlekedés és szállítás eszközeinek tökéletesítése terén tapasztalunk. A gőzerő megrövidítette a távolságokat, az elektromosság megszüntette azokat. Ebből kifolyólag a föld népeinek ipari és kereskedelmi összeköttetése ép oly intensiv, mint extensiv fejlődésnek indult. A czivilizált világ, a mely még alig egy évszáz előtt csak a régi Európára szorítkozott, új nemzeteket [1] és egész világrészeket kebelezett be. Az európai piacz most már felöleli az egész földet; a tudomány és technika, melyeknek nem rég csak egyes kiváltságos népek voltak művelői, immár az összes kulturnemzetek közbirtokába mentek át és mivel ezek fejlesztésükhöz mindannyian hozzájárulnak, a találmányok és haladások áldásában is egyaránt részesülnek. Mindezekből az eszmék és érdekek oly közössége származott, mely mindjobban megerősödött és a kulturnemzeteknek mind szorosabb szolidaritását létesítette.

E folyton szaporodó és bővülő nemzetközi relácziók közös organum szükségét mindinkább érezhetővé tették, mert a nyelvek különbözősége a legfőbb, talán az egyedüli akadály, mely e relácziókat megnehezíti. «A szellemi forgalom eszközei megszégyenítő módon szárnyaltattak túl az anyagi forgalom eszközeitől. Csak a testeket hozták közelebb egymáshoz, de mi sem történt a szellemek közelítése érdekében.» [2] Mi haszna, hogy a világ egyik végéről a másik végére utazhatunk, irhatunk, beszélhetünk, ha egymást meg nem értjük? Valóban, annak a süketnémának a tragikomikus helyzetébe jutottunk, a kit telefonnal kinálnak meg. Hát nem vagyunk többé-kevésbbé süketnémák mi is az idegennel szemben?

A tudománynyal foglalkozókra nézve napról-napra égetőbbé válik a kényszerűség, hogy az eszmék fejlődését a világ összes országai-

---

[1] Japán 1900-ban ismerte el az európai nemzetközi jogot.

[2] De Beaufrond «Manuel complet de l'Esperanto» előszavának 4. lapján, 4. kiadás. Paris, Le Soudier 1899.

ban figyelemmel kisérhessék; e mellett ennek lehetősége hovatovább mind kisebb lesz, mert az eszmék fejlesztésében közremunkáló népek száma folyvást nő. Ez oly kényszerhelyzetet teremt, a melyet tovább tűrni már nem lehet. Az 1900-ban Párisban tartott számos nemzetközi gyülekezeten legszembeötlőbb módon mutatkozott oly nyelvnek a szüksége, mely a föld összes népei előtt ismeretes. Míg a tudományos, sőt bölcseleti igazságok tekintetében a megegyezés mindinkább létrejön, az intellektuális rokonság és sympathiának szálai mindjobban megerősödnek, addig a közvetetlen eszmecserének és a szellemek közvetetlen kölcsönhatásának egyedül a nyelvek különbözősége állja útját. A fogalmak alapvető egységével szemben a szavak és grammatikai formák különbözőségét oktalannak és zavarónak érezzük, mert ezek a dolgok való mivoltát nem egyszer meghamisítják vagy eltorzítják. Érthető tehát, ha e congressusokon és más tudós társaságokban is nemzetközi nyelvnek szükségét a legélénkebben érezték. E congressusok és társulatok tagjai nagyjában magukévá tették Leau dr. azt a javaslatát, a melyet a Société philomatique de Paris [1] képviseletében eléjök terjesztett és közösen oly nyilatkozatban állapodtak meg, mely megszabja a feltételeket, melyeket a jövő világnyelvnek teljesíteni kellene és egyszersmind útmutatással szolgál annak terjesztésére is. Ez a programm az, a melyet következőkben előadni és kifejteni óhajtunk.

A segédnyelv szóban és irásban.

Hogy már eleve minden félreértést kizárjunk, különösen hangsúlyozzuk, hogy szóba se jöhet, hogy a nemzeti nyelvek előbb-utóbb kiszoríttassanak vagy mással pótoltassanak, hogy itt csak oly nemzetközi segédnyelvről van szó, mely különböző anyanyelvű egyének szóbeli és irásbeli érintkezésére szolgálna. Ez lenne az összes népek közös idegen nyelve és így az egyetlen nyelv, a melynek külön elsajátítása az érintkezést bárkivel is lehetővé tenné, egyszóval *mindenkinek második nyelve.*[2]

Kiemeljük, hogy a világnyelvnek ép úgy, mint a nemzeti nyelveknek, *szóbeli és irásbeli* közlésekre alkalmasnak kell lennie. Levelezésbe léptem külföldi tudóssal; utóbb congressuson vagy egyebütt találkozunk; hát nem felette kivánatos, hogy szóbeli tárgyalásaink alkalmával ugyanazzal a nyelvvel éljünk, melyet levelezésünk alkalmával ugyane kérdések

---

[1] V. ö. «La langue universelle est-elle possible ? Appel aux hommes de science et aux commercants» czimű iratát, Paris, Gauthier-Villars 1900.

[2] L. Bollaek «Langue bleue»-jének mottója.

fejtegetésekor használtunk? Azt a természetes követelést kell még kiemelnünk, és ez szükségesebb, semmint hinnők, hogy miután a világnyelven irni és olvasni megtanultuk, még meg kell tanulnunk azon beszélni és érteni is. Igaz, hogy kevesebb alkalom kinálkozik a beszédre, mint az irására, de viszont az is igaz, hogy az olvasás és irás elsajátítására fordított idő teljesen kárba veszne, ha a szóbeli érintkezés kedveért új nyelvet kellene megtanulnunk. Ez a körülmény már maga kizár megint minden *fogalmi irást,* a minő például a chinai irás.

A világnyelv elterjedése és használata.

A világnyelvvel élhessenek: 1. mindennemű tudósok, a minők a philosophusok, jogászok, orvosok, mérnökök, historikusok, nyelvészek, egyszóval a tanulmány emberei; 2. iparosok és kereskedők; 3. utazók. Ez a kivánság talán túlmerésznek hangzik, de ebben nem tágíthatunk. Egy tisztán tudományos nyelvnek eszményét, mint tökéletlent, el kell vetnünk. Mert ki mondhatná meg, hol végződik a tudomány és hol kezdődik a technika, a kereskedelem? Hát a physikai műszereknek vagy a chemiai gyártmányoknak stb. kétféle elnevezésük legyen, egy, a melyet a tudósok használnak és egy másik laikusok számára? Kebelezzük csak be a tudomány nyelvébe a technika elnevezéseit és meglátjuk, hogy az akkor csakhamar a kereskedelem és a kereskedelmi utazók nyelve lesz, de ezzel egyszersmind a közönséges utazóra is nélkülözhetetlenné válik, a ki mindenütt kereskedőhöz kénytelen fordulni. De a tudósok sem pusztán szellemi lények; mihelyt laboratoriumaikból, könyvtáraikból kilépnek, szakasztott ugyanazon igényeik vannak, mint más földi halandóknak. Tudós világnyelv okvetetlenül a kereskedelmi világnyelv keletkezésének veszedelmét idézné fel és mivel ezt százszorta is többet használnák, az előbbit csakhamar kiszorítaná a használatból. De különben is badar dolog a tudomány nyelvét a mindennapi élet nyelvétől úgy megkülönböztetni, akár csak két különböző nyelvről volna szó: néhány terminustól eltekintve, a milyen minden mesterségben is előfordul, a nyelv túlnyomó része ugyanaz akadémikusnak és kereskedőnek szemében; tökéletesen megértik egymást, ha az egyik a másiknál bevásárol. A világnyelv tehát sem technikai, sem aristokratikus nyelv ne legyen, mely csak néhány kiváltságos beavatottnak hozzáférhető; legyen ez a mindennapi élet nyelve, melyet vasúton és szállodákban ép úgy használhassanak, mint tudós társaságokban és nemzetközi congressusokon. Egyszóval ugyanaz legyen a területe és alkalmazhatósága, mint a nemzeti nyelveké.

Létező nyelv alkalmatlan.

Első tekintetre a legegyszerűbb és közvetetlenül kinálkozó megoldás abban állana, hogy a meglevő élő nyelvek egyikét szemelnők ki világnyelvül. De ez az eszme csakhamar kivihetetlennek és egyszersmind az egyetlennek mutatkozik, melyet már eleve kell kizárnunk. Valóban lehetetlennek kell tartanunk, hogy az összes nemzetek valaha megegyeznének abban, hogy egyiküknek a nyelvét elfogadnák. Egy ilyen meglevő élő nyelv kiválasztása nemcsak hogy a többi nemzetek jogos önérzetét, de politikai és gazdasági érdekeit is mélyen sértené, mert hiszen a kitüntetett nemzetnek ezzel nemcsak a kereskedelem, hanem a tudomány terén is tűrhetetlen túlsúly biztosíttatnék. Valamely nemzet nyelve az eszméinek, befolyásának, termelésének, sőt divatjának vehikuluma, nemzeti egységének, függetlenségének és uralmának symboluma. A nagy nemzetek sohasem fogják zászlójukat más nemzet előtt meghajtani oly értelemben, hogy a hegemoniát ennek engedvén át, magukat annak alárendeljék.

Ehhez még hozzájárul az a körülmény, hogy a nemzeti nyelvek egyike sem tarthat számot határozott fölényre a többiekkel szemben, mert ezek közül egy sem ideálisan egyszerű, szabályos avagy tökéletes. Mindegyiküknek megtanulása nehézséggel jár s ebben a tekintetben a különböző nyelvek körülbelül egyformák; felesleges komplikácziókban, számos kivételben, hiányosságokban és különösségekben a nemzeti nyelvek mindegyike bőven leledzik. Ha a különböző országok philologusai nemzeti büszkeségüket teljesen félretennék és a nyelveknek csak logikai tulajdonságait tartanák szem előtt, még akkor sem egyezhetnének meg abban, hogy közülök melyik a legjobb és legelőnyösebb. Mivel ily módon nemzetközi megegyezés ebben az irányban lehetetlen — lemondva minden hiú reménykedésről és jogosulatlan igényről — nem marad más hátra, mint oly neutrális nyelv választása, melynek elfogadása sem az egyes nemzetek büszkeségét nem sérthetné, sem pedig anyagi és erkölcsi érdekei tekintetében reájok indokolatlan áldozatokat nem róna.

A nyelvek többsége.

Van a megoldásnak más módja is, melyet mi azonban csak kibuvónak fogadhatunk el és a melyet meg se czáfolnánk, ha a mathematikusok congressusa nem épen ezt javasolta volna. Ez a megoldás abban állana, hogy a tudomány és a kereskedelemben használandó nyelvek száma öt-hatra redukáltassék. Ez a javaslat teljesen kivihetetlen. Mert hol van az az autoritás, mely ellenmondás nélkül kiválaszthatna a létező nyelvek közül néhány kiváltságosat és e mellett a többit azoknak kizárása által lefokozhatná? Ily döntés felette önkényes és elfogult és csak annyi háborúságra adna alkalmat, mint akár egy egyetlen nemzeti nyelvnek világnyelvül való dekretálása. De feltéve, hogy ily döntés határozatba is menne, hol van az a földi hatalom, mely ezt a határozatot végre is hajthatná? Azok a népek, melyeknek nyelvét kizárni akarnók, teljes joggal vonakodnának nyelvüket, nemzeti egységüknek e leghatalmasabb kifejezőjét feláldozni és ezt annyival kevésbbé tennék, minél nagyobb a veszély, hogy saját nemzeti nyelvükről lemondván, hatalmasabb szomszédos nemzet részéről való erkölcsi elnyomatástól tartaniok kellene. Csakis neutrális nyelv választásával lehetne az egyes nemzetek jogos érzékenységét sérelmektől megkimélni, csak ezzel lehetne a hazafias érzés és érdek közötti jó középutat meglelni, csak így lehetne az összes nemzeteknek egyforma elbánást biztosítani és végre megegyezést is létesíteni. Ilyen nyelv nem ellensége, hanem legjobb barátja volna a nemzeti nyelveknek.[1]

Söt tegyük fel, bár minden valószinűség ellene szól, hogy a tények hatalma ilyen megoldást kierőszakolhatott volna, akkor is az összes népek (a művelt elemeiket értem) kénytelenek lennének négy-öt különböző és heterogén nyelvet megtanulni, melyek mindegyike a maga különleges nehézségeivel hosszú évi fárasztó tanulmányt igényel. A középiskolákat akkor a modern nyelvek tanítása teljesen elfoglalná és pozitiv tanulmányokra (természettudományokra, históriára stb.) nem maradna idő; a valódi szellemi művelődésről tehát le kellene mondanunk. A jelenleg uralkodó rendszer czélszerütlenségét alig lehet jobban beláthatóvá tenni, mint azzal, hogy általánosításának és nyelvi irányban való még szélesebb kibővítésének gondolatát szemügyre veszszük. A tudósoknak polyglottákká kellene átvedleniök, hogy képesek legyenek mindama tudományos dolgozatról tudomást szerezni, melyek őket érdeklik; e czélból minden egyéb tanulmányt el kellene hanyagolniok, tehát ignoránsokká válniok.

Valóban minden ilynemű határozatnak, gyakorlati sanctio híjában, csak az a hatása lenne, hogy a jelenlegi állapotokat perpetuálná, söt még silányabbá tenné. A tudósok — úgy mint idáig — jól-rosszul elsajátítanának két-három nyelvet, a melylyel — úgy a hogy — fél Európában eligazodhatnának és ama dolgozatoknak talán fele részéről szerezhetnének tudomást, a melyeknek tartalmával megismerkedni óhajtanának. A másik felük hozzáférhetetlen maradna azontúl is, úgyszintén a czivilizált világ másik fele.

---

[1] De Beaufort, a Société pour la propagation de l'Esperanto elnöke

Ellenvetésképen azt lehetne felhozni, hogy hiszen fordítások is készülnek. De hát le is fordítják minden főnyelvre mindazt, a mi a világon érdekes megjelenik, nem mondom a szépirodalmi dolgokat, hanem a tudományosakat? Vegyünk pl. oly művet, mely elvont tudománynyal foglalkozik: össze-vissza ezer tudós érdeklődésére tarthat számot, tehát ebből egyikére a főnyelveknek kétszáz esik. Ha le akarnák fordítani, senki sem akarná a fordítás költségeit viselni; tehát nem fordítják le. Ha azonban a világnyelvre fordítanák le, kelendősége már eleve biztosítva lenne. Ha hozzáveszszük még, hogy mennyi hiábavaló munka esnék el azzal, hogy négy-öt fordítás helyett csak egy készülne (különösen akkor, ha a szerző maga is a világnyelven irta meg művét), hogy továbbá a mű egyszerre lesz hozzáférhetővé a teljes nemzetközi érdeklődő közönségnek, míg különben annak nagyobb fele a fordítást kénytelen megvárni, lehetetlen fel nem ismernünk azt a nagy előnyt, a melylyel minden nép előtt ismeretes segédnyelvnek használata járna.

Szíves figyelmükbe.

Eddig csak oly általános nyilatkozatokat commentáltam, melyek a megegyezés alapjául szolgálhatnának és melyeknek híveket szerezni óhajtunk. Ha azonban a megegyezés alapja tekintetében tisztába jöttünk, a részletek dolgában még helye van az egyéni véleménynek. Legyen szabad az enyémet itt kifejtenem, még pedig többféle oknál fogva. Mindenekelőtt a philosophusok nemzetközi congressusa részéről megbizást kaptam a világnyelv kérdésének tanulmányozására és így köteles vagyok megbizóimnak tanulmányaim eredményéről beszámolni.

Legelső és egyszersmind legsúlyosabb ellenvetés, a mely a világnyelvvel szemben tehető, abban a kérdésben foglalható össze: *Lehetséges-e ilyen világnyelv?* Mert nemcsak könnyelműséggel, de egyenesen a bizalom visszaélésével vádolhatnának bennünket, ha oly terv megvalósításáért lépnénk sorompóba, melynek megvalósíthatása iránt magunk sem vagyunk teljesen meggyőződve. Ebben a tekintetben elég felemlítenünk, hogy egyes használatban levő világnyelv-rendszerek létezése a lehetőségüket már is legjobban bizonyítják. Ezenfelül meg kell emlékeznünk egyes ily világnyelvekre vonatkozó birálatokról, melyek azonban a többieket nem érintik.

Végül fel kell tennünk, hogy olvasóink egyik-másikának világnyelvről vagy ilyenre vonatkozó javaslatról még fogalmunk sincs; ha pedig alkalmatlan ily kisérletekkel ismerkednének meg, annyival rosszabb lenne. Fogalmaik tisztázására tehát szükséges, hogy a különböző eddigi rendszereket nekik összehasonlító áttekintésben bemutassuk. Mivel én magam e rendszerek egyikének sem szerzője, sem híve nem vagyok, úgy gondolom eléggé elfogulatlanul itélhetek s ha az egyik irány felé jobban hajlok, mint a másik felé, ez bizonyára csak azért történik, mert szilárd meggyőződésem, hogy a végleges megoldás csakis határozott irányban található. De hozzá teszem, hogy csak *személyes meggyőződésem az,* a mit az olvasó elé abból a czélból terjesztek, hogy a discussiót megindítsam.

A latin mint világnyelv.

Az első megoldás, mely a tudósoknak, különösen philosophusoknak és historikusoknak kinálkozik, a latinnak mint világnyelvnek elfogadásában állana, hiszen ez a nyelv valamikor már mint ilyen szerepelt is. Ezzel szemben azonban az összes ellenvetések fennállanak, a melyek kizárólagosan tudós nyelvvel szemben tehetők. Nem ismételhető eléggé, hogy a világnyelv ne csak tudósok számára készüljön, hanem hogy ez hozzáférhető legyen legfőképen oly közepes műveltségű férfiaknak és nőknek, a kik anyanyelvükön kívül más nyelvet nem ismernek. Tehát olyannak kell lennie, hogy mindenki önmaga — tanítónak segítsége nélkül — megtanulhassa. E feltételek közül a latin nyelv egyet sem teljesít, mert megtanulása legalább is oly nehéz, mint bármely élő nyelvé s bonyolódott és sokszor rendhagyó grammatikájával és syntaxisával ugyanazon hátrányokban leledzik, mint más nyelvek. De ezenfelül még az a rendkívüli hátránya is meg van, hogy holt nyelv s hogy alkata és szókincse egy már örökre letűnt kultura-állapotnak felelnek meg. Épen ez volt az oka annak, hogy még a tudósok is, ezek pedig jól értettek hozzá, felhagytak vele; hiába, a századok természetes lefolyásának megfordítása s a holtak felelevenítése a lehetetlenségek közé tartozik.

Igaz, hogy egyesek megkisérlették a latint feleleveníteni, felfrissíteni; a Vox Urbis példaképen felemlíti a kerékpárnak *birota velocissima*-ra való jeles fordítását.[1] Ez az elegáns körülirás — nem tagadható — latin költeményben eléggé jól festene, de üzleti levélben vagy hirdetésekben talán mégis kissé körülményesnek látszik. De hány tudományos és technikai kifejezésünk van, a melyeket a latinban még körülirással sem pótolhatnánk! Ha már régi nyelvet kellene választanunk, akkor erre a görög nyelv sokkal alkalmasabbnak mutatkoznék, a mely új szavak képezését sokkal inkább engedi s a mely eddig is valóban számos használatban levő terminust szolgáltatott.[2]

---

[1] A. Valdarnini: Il sovraccarico della meute e lo studio d' una lingua internazionale, Bologna 1900.

[2] R. de la Grasserie a gyökszóknak a görögből való választását javasolta. (De la possibilité et des conditions d'une langue internationale. Paris, Maisonneuve 1892.)

De tegyük fel, hogy már sikerült volna a latin szótár modern szellemben való kiegészítése és kibővítettük volna a *magazine* és *realisare*-fajta neologismusokkal (Leibniz), a melyeket a puristák a barbarismusok közé sorolnak, mégis csak megmaradna a latin nyelv felette bonyolult és nehéz grammatikája és syntaxisa. Ezeket kellene megegyszerűsítenünk, legelőször azzal, hogy a főnevek számára csak egyféle declinatiót, az igék számára csak egyféle conjugatiót engednénk meg. De az így átgyúrt latin nyelv nem mutatná sem Cicerónak, sem a scholastikusoknak latinságát; latin alapon készült mesterséges nyelvet kapnánk, mely sokkal kevésbbé egyszerü és nemzetközi, mint egy teljesen mesterséges úton készült nyelv.

De ilyen stylű reform a latin nyelv védelmezőinek főargumentuma és tendencziája ellen is vétene. Mert ha ők e mellett foglalnának állást, ezt főkép azért tennék, mert a letűnt traditio felelevenítését a természettudományi és klassikai tanulmányok egyesülésétől óhajtják. Ez az új latin azonban Virgiliusnak nyelvével épen csak a közös nevet osztaná és a humanistikus műveltséget nem hogy felelevenítené, hanem végkép tönkre tenné, ha ezt összekotyvasztanák oly barbár nyelvvel, a melyet a latinisták sohasem ismernének el.[1]

Sőt ellenkezőleg, a klassikus nyelvek híveinek a reáliák és modern nyelvek folyton növekedő térfoglalásával szemben csak egy módjuk van a védekezésre, ez pedig a határozott állásfoglalás a világnyelv mellett, mert ez nagyobb számú idegen nyelvnek megtanulását feleslegessé tenné. A világnyelv megtanulása sokkal egyszerűbb lévén mint bármely élő nyelvé, a tanidőnek nagy részét felszabadítaná, melyet az ókor nyelvének és irodalmának vagy pedig gyakorlati ismereteknek oktatására lehetne fordítani. Ez szolgáltatná egyszersmind a legegyszerűbb módot arra is, hogy véget vessünk a minden ország középiskoláiban tapasztalható senyvesztő túlterheltségnek és a tanítóktól joggal felpanaszolt felszínes

[1] Ugyanez hozható fel ama javaslattal szemben, mely valamely élő nyelvnek szabályozására, illetve egyszerűsítésére vonatkozik. Egyrészt vétene ez a neutralitás jogos követelése ellen, másrészt az ilyen nyelvet még az a nép sem értené meg, melynek nyelve alapul szolgált, és az ekként kitüntetett nép a legutolsó lenne, mely e nyelvet a magáénak vallaná. Jól tudjuk, hogy mekkora ellenszegülésre talál már csak az orthographia vagy syntaxisnak legcsekélyebb megváltoztatása a traditiók híveinél. Aránytalanul könnyebb tehát egész új nyelvnek kreálása, mint meglévőnek átalakítása, s hozzátehetjük még, hogy mesterséges nyelv minden körülmények között inkább lesz az egyszerűség, szabályosság és nemzetközi charakter követeléseinek megfelelően megalkotható.

tudákosságnak.[1] A latin és görög érdekében legfeljebb annyit hozhatunk elő, hogy ezek szolgáltatták a legtöbb immár nemzetközivé vált műszónak gyökét; ezeket a világnyelv természetesen változatlanul átvenné. De e mellett óvakodnunk kell attól a kizárólagosságtól, hogy a műszavakat csakis a holt nyelvek szókincséből akarnók kiválasztani. Mert az ilyen vocabularium nem lenne elég egyszerű azoknak, a kik csakis anyanyelvükön beszélnek, de még neutrálisnak sem lenne elfogadható, mert a román néptörzseknek a szláv és germán néptörzsekkel szemben túlságosan kedvezne. Később látni fogjuk, hogy mily alapelvek szerint és mekkora terjedelemben volnának felhasználhatók a görög-latin gyökök a világnyelvben. Nagy súlyt helyezünk arra, hogy a világnyelvet különösen sokat használt terminusok bekebelezésével a nemzeti nyelvekhez közelebb hozzuk. Hogy ez valóban lehetséges, arról később még szó lesz.

A philosophiai nyelvek.

Miután a holt nyelveket kizártuk, most már csakis a philosophiai és a mesterséges nyelvekben van válogatásunk. A philosophiai nyelvek a logika megérzékítését, a gondolkodás bizonyos segédeszközeinek teremtését kivánják. Minden dolognak a neve symbolikusan kifejezné annak természetét és definitióját, úgy hogy pusztán szavaknak segítségével következtetni — hogy úgy mondjam — számolni lehetne. Nem czélozunk itt a pasigraphia, ideographia avagy a logika-kalkulus újabb rendszereire (ez utóbbinak magam is buzgó híve vagyok), mert ezeknek közös fogyatkozásuk, hogy a beszédre alkalmatlanok és kiki ezeknek jeleit saját nyelvén kénytelen elolvasni. Még rá kell itt mutatnunk régibb propositiókra, különösen Descartes és Leibniz-ére. Mint czéhbeli philosophus és mint olyan, a ki Leibniz logikájának külön tanulmányt szenteltem,[2] talán kimondhatom, hogy ilynemű kisérletek teljesen kivihetetlenek. Mert ezek ama feltevésen alapulnak, hogy az összes fogalmaink néhány egyszerű képzetnek homogén és egyértelmű összetételei, melyek úgyszólván az emberi gondolkodás ABC-jét kitennék.

Ez azonban az emberi gondolkodás folyamatának hamis és szertelenül egyszerűsített felfogása. Ez az összes itéleteket oly kijelentésekre

---

[1] E. Naville: La langue internationale, mémoire présenté à l'Academie des sciences morales et politiques, Janvier 1899.

[2] La Logique de Leibniz, d'aprés des documents inédits (Paris. Alcan, 1901). Cf. Opuscules et fragments inédits de Leibniz, publiés par L. Couturat (Paris, Alcan, 1902).

redukálná, melyekben az előforduló ige *est;* tehát szem elől téveszti a dolgok és fogalmak összes vonatkozásait, s csak a genus és species közöttieket tartja meg. Az ily alapon teremtett nyelven képtelenek volnánk a kicsoda, micsoda kérdésekre válaszoló relatiókat, de sőt még az egyszerű genitivust is kifejezni és a míg pl. az összes kutyákat fajuk szerint definiálhatnók, nem volna kifejezésünk vagy definitiónk ilynemű összetételek számára, a milyen a *vaknak kutyája,* vagy a kertész kutyája. Ez csak annyit jelent, hogy egyáltalában lehetetlen az összes dolgokat genus és species szerint osztályozni és nomenclaturával ellátni, a mint ez pl. az állattanban vagy növénytanban történik.

De ezenfelül ilynemű rendszerek a praktikus kivitelben mindig teljesen önkényesek, a mint ezt pl. DALGARNO és WILKINS rendszere mutatja, a melylyel LEIBNIZ foglalkozott. Ugyanazon nemnek különböző lényei számára általános elnevezést választanak, a melynek végbetűjét megváltoztatván, jelölik a speciest. Így pl.:

$N\eta\varkappa\alpha$ = elefánt, $N\eta\varkappa\varepsilon$ = szamár,
$N\eta\varkappa\eta$ = ló, $N\eta\varkappa o$ = öszvér

és í. t.[1] De hogyan tartsuk eszünkben ilyként képezett szavak jelentését? Ugyanazt érjük el, mikor azt mondjuk: első állat, második állat, harmadik állat, stb. De hogy megtudhassuk, hogy melyik számnak melyik állat felel meg, már szótárt kellene forgatnunk. Körülbelül ugyanaz volna ez, mint a mit BECHER[2] akart, a ki minden nyelv szókincsében lévő összes szavaknak számozását tervezte és a különböző nyelvek azonos jelentésű szavainak ugyanazt a számot akarta juttatni.

E rendszerek mindannyian félreismerték a psychologiának azt a törvényét és a memoriának ama követelését, hogy: minél hasonlóbb két szó értelme, annál élesebben kell azoknak *alakjait* megkülönböztetnünk, ha őket szétválasztani és emlékezetben tartani akarjuk. Sokkal inkább tarthatók emlékezetben az ilyen szók: elefánt, nilusi ló, orrszarvú, mint pl. 1. számú vastagbőrű, 2. számú vastagbőrű, 3. számú vastagbőrű.

De e rendszerek megalkotóinak legnagyobb hibájuk, legvégzetesebb tévedésük abban van, hogy fogalmaink alkotórészeiről azt hiszik, hogy azoknak száma oly csekély, hogy jelölésökre néhány könnyen megjegyezhető betű meg szótag elegendő lehetne. E tévedés megvilágítására elégséges felemlítenünk, hogy már pusztán csak a mathematikai

---

1. DALGARNO: Ars signorum, vulgo Character universalis et lingua philosophica, 1661.

2. Character pro notitia linguarum universali.

fogalmak logikai analysisében mintegy száz egymásba át nem vihető symbolumra szorulunk.[1] Ismerjük továbbá a szerves chemiában szereplő anyagok hosszadalmas és bonyolódott elnevezéseit; s ez épen onnan van, hogy ezek nem pusztán elnevezések (mint pl. az oxalsavé), hanem egyszersmind arra is tartanak igényt, hogy az illető anyagnak definitiójáúl és vegyi képletéűl szolgáljanak. Csak gondoljuk meg, hogy mennyi jelet kellene használnunk pl. már a legegyszerűbb étel nevének szerkesztésére, ha e névnek nemcsak az ételben foglalt anyagokat, hanem azok összetételét és előállításuk módját kellene kifejeznie. Elszörnyedünk, ha csak gondolunk reá, hogy mekkora hosszadalmasságokkal járnának a kenyérnek, bornak, kaviárnak, plumpuddingnek ideographikus elnevezéseik. Ép oly szövevényes ideographiára jutnánk, mint a milyen a chinaiaké; s mivel ily kimondhatatlan, hosszú szókkal beszélni sem lehet, az ezekből alakított nyelv világnyelvnek természetesen alkalmatlan.[2]

Végül még kiemeljük, hogy összes fogalmaink logikai analysise ez idő szerint még koránt sincsen befejezve s alig van rá reményünk, hogy valaha teljesen elkészül.[3]

Szerencsére ez az analysis szavaknak vagy akár a legbonyolódottabb fogalmak közlésére nem is kell. Ha mellőzhetetlenül szükséges lenne, akkor a gondolkozást inkább akadályozná, semmint elősegítené. Mert ha a szó igazán definitiója volna a fogalomnak, akkor ezt a definitiót gondolatban mindig el kellene ismételnünk, valahányszor az illető szót használjuk. Mondatot pedig egyáltalában nem mondhatnánk el, ha minden benne előforduló szót gondolatban definitiójával kellene helyettesítenünk. Mi valami dolgon csak ama folyamat segítségével gondolkodhatunk, a melyet LEIBNIZ *psittacismusnak* vagy symbolikus gondolkodásnak nevezett. A gondolkozás e mellőzhetetlen formáját pedig az ideographia lépten-nyomon megakadályozná, mert ez figyelmünket minduntalan a szavak concret és adæquat értelmére terelné. Összefoglalva az eddigieket tehát kimondhatjuk, hogy philosophiai nyelvnek használata a tudomány jelen állása mellett kivihetetlen, sőt még a tudósok sem használhatnák,

---

[1] PEANO: Formulaire de Mathématiques (1901), S. VII; a mathematikai szótár 17,000 szót tartalmaz.

[2] Vagy pedig — a mint már LEIBNIZ is belátta — minden dolog jelölésére kétféle elnevezést kellene használnunk, egy tudományosat és egy népszerűt. Ez a nyelv megduplázását vonná maga után, ennek czélszerűtlensége pedig evidens.

[3] «L'invention de cette langue depend de la vraye Philosophie» mondja DESCARTES; LEIBNIZ pedig: Il est vray que ces Charactères presupposeroient la véritable philosophie.

mert a nyelv czéljának és a symbolizálásnak meg nem felel és a gondolkozást nem hogy elősegítené, inkább megbénítja.

A mesterséges nyelvek.

Nem marad tehát egyéb hátra, mesterséges nyelvhez kell folyamodnunk. Jőjjünk tisztába mindenekelőtt a *mesterséges* jelzés értelmével. Egyáltalában nem kell, hogy teljesen új nyelvet alkossunk s az élő nyelveket teljesen figyelmen kívül hagyjuk. Nem is lehet minden meglévővel szemben a tabula rasa álláspontjára helyezkednünk: mi nem vagyunk a paradicsomban és nem lehet hivatásunk ismét helyreállítani azt a nyelvet, a melyet Ádám feltalált vagy a melyet legalább neki fel kellett volna találnia. Épen ez olyan pont, a mely egynémely igen elmés, de bizonyos fokig a priori megkonstruált mesterséges nyelvrendszer megalkotásánál figyelmen kívül maradt. Így pl. arra is gondoltak, hogy a magánhangzók és mássalhangzók minden kiejthető szótagot szolgáltató combinatióiból szókat képezzenek, melyeknek többé-kevésbbé a véletlen alapon választott, de határozott értelmet tulajdonítanának; így készülne a világnyelv szótára. Nem szorul magyarázatra, hogy az ilyen szógyűjteményt, a melyben a szavaknak túlnyomó többsége élő nyelveinkkel semmiféle analogiát sem mutatna, megtanulni vagy emlékezetben tartani teljességgel lehetetlen; hogy e nyelven beszélhessünk vagy irhassunk, a szótárt kezünkből ki sem adhatnók, ez pedig oly alapvető hibája, hogy mint világnyelvet teljesen disqualifikálja. Szótár készítése nem fogható fel mint a combinatorika feladata.[1]

A nemzetközi szókincs.

Világnyelv csak úgy sikerülhet, ha szótára, a mennyire csak lehetséges, a nemzeti nyelvekéhez közel áll. A legelső pillanatban teljesen neutrális és minden néppel közös szótár készítése felette nehéznek látszik. Pedig valójában van már nemzetközi szótárunk, mely sokkal gazdagabb és sokkal jobban el van terjedve, semmint hinnők. Mindenekelőtt megjegyezhetjük, hogy a tudományos és technikai szakkifejezések, melyeket a görög vagy latin nyelvből kölcsönöztek, az összes európai nyelvekben ugyanazok; el sem képzelhető, hogy ezeket másokkal pótoljuk.[2] Ebben a tekintetben a görög-latin szóképezések a világpolgári

---

[1] Cf. BAUER: Sprachwissenschaftliche Kombinatorik, Agram, 1886.

[2] Példák: *atom, axioma, architektura, borax, croup, gáz, granit, guitare, geometria, geodezia, mechanika, physika, kristály, litteratura,*

jogra tarthatnak igényt. Ellenvetésképen azt lehetne felhozni, hogy a német tudományos terminologia ebben a tekintetben kivételt alkot. De ezzel szemben felemlíthetjük a német nyelvben majd minden germán alapon készült műszónak görög-latin ikertestvérével találkozhatunk, mely utóbbi azután internationalis (pl. Gesellschaft, Societät). De még ott is, a hol a második szóképzés hiányzik, a német kifejezés távolról sem annyira nemzetközi, mint a görög-latin æquivalense: *Fernsprecher* sohasem lesz annyira internationalis, mint *Telephon, Wissenschaft* annyira, mint *science.* Hát a német chemikusról talán feltehető, hogy a midőn a vizet H_2O-nak irja, ne tudná, hogy *H Hydrogen*-t (és nem *Wasserstoff*-ot), *O* pedig *Oxygen*-t (és nem *Sauerstoff*-ot) jelent.

De nemcsak a tudományos vocabularium nemzetközi; a gyakran, sokszor minden nap használt szavak nagy része közös az összes európai nyelvekben.[1] Világos, hogy e kifejezések mindannyian a világnyelvbe beveendők, mert ha világnyelv nem is léteznék, ezekkel a világon mindenütt megértethetni magát. Más szók megint olyanok, hogy egyszerre legalább három nyelvben, a németben, angolban és franciában szerepelnek.[2] Természetes, hogy ezek is alkalmasak a befogadásra, mert már amúgy is leginkább nemzetköziek és a legtöbb idegen is megérti azokat. Sőt ha egy és ugyanazon törzsszó kiejtésben és irásban a különféle nyelvekben más-más alakot öltött, mint pl. Nase (nez, nose) még akkor is előnyösebb (pl. Nos) közepes szót használni, mint teljesen önkényes szót alakítani.

Tehát van már elég tekintélyes terjedelmű nemzetközi szótárunk, mely folyton bővül; a dolog természeténél fogva ez kell, hogy a világnyelv magvát alkossa. Elegendő ezt kibővítenünk, még pedig úgy, hogy minden fogalom jelölésére oly szót használunk, mely még leginkább nemzetközi jellegű, tehát a legtöbb — legalább is két — nyelvvel közös; ilyen két nyelvben egyszerre előforduló szavak — mint tudjuk — elég gyakoriak.[3] Oly fogalmak jelölésére pedig, melyeknek minden nyelvben

---

muzsika, poesis, philosophia, phosphor, minuta, secundum, opal, saphir, topas, tigris, leopard, planeta, platin, rim, styl, summa, thesis, vulkán, zenith, zink.

[1] Példák: *posta, telegraph, theater, tabak, ananas, anis, artischocke, bárka, billet, buffet, bronze, charakter, chocolade, diamant, epocha, fabrique, flanell, forma, galleria, granate, karte, lámpa, limonade, rizs, rente, rose, saison, secretarius, signol, sirup, sauce, talentum, táncz, terasse, toilette, universitas, walzer, waggon.*

[2] Példák: *Caraffe, Droge, Elephant, Familie, Flamme, Industrie, Insect, Institut, Kaffee, Novize, Onkel, Papier, Person, Pumpe, Ratte, reich, Sack, Thee, Verbum.*

[3] Így pl. *Schiff (ship)* inkább választandó mint *bateau, Schuh (shoe)*

más szó felel meg, a törzsszókat igazságos elosztással az összes európai főnyelvek szókincséből úgy kellene kiszemelnünk, hogy a legrövidebbet, legjobb hangzatosút és legvilágosabbat választjuk. Ez eljárás mellett egyszersmind lehetségessé lesz a kettős értelmű szókat teljesen elkerülnünk és oly fogalmakat, melyek könnyen elcserélhetnénk, különböző nyelvekből választott gyökszókkal való jelölésük segítségével élesen széttartanunk. Nyilván való, hogy az így készített szótár leginkább lesz nemzetközi jellegű s a különféle népek által legkönnyebben elsajátítható, mert hiszen mindenki a gyökszóknak fele részét már is ismeri.

A szók képezése és összetétele.

Az eddigiekben folyton szógyökökről szólottunk. Hogy valamely nyelv egyszerű és könnyen elsajátítható legyen, szükséges, hogy az okvetetlenül emlékezetben tartandó törzsszók számát minimumra redukáljuk. Azonfelül pedig a szóképzést és szóösszetételt teljesen általános és kivételeket kizáró szabályokra kell visszavezetnünk.

Így pl. oly férfi elnevezését, a ki valamely művészettel, tudománynyal vagy mesterséggel foglalkozik, egyöntetűen az *-ist* képzővel fogjuk levezetni, holott ma erre különböző nyelvekben más-más képző szolgál. Mintegy harmincz ily képzővel, melyet a különböző élő vagy holt nyelvekből választhatunk, minden lehető vonatkozást ki lehetne fejeznünk s könnyen belátható, hogy e változatlan értelmű képzők használata menynyire emelné a nyelvnek világosságát. Összetett szók szerkesztése tekintetében az új nyelvnek ép oly egyszerű eljárással kellene rendelkeznie, mint a görög vagy német nyelvnek. Összefoglalva az eddigieket, azt mondhatjuk, hogy világnyelvnek képesnek kell lennie arra, hogy a különböző nemzeti nyelvekből kiszedett szógyökökből képzők és szóösszetétel segítségével szabályos és automata módon új szókat levezethessen, a nélkül, hogy valami kivétel bennünket ebben megzavarhatna, vagy a nélkül, hogy tartanunk kellene — mint az összes élő nyelvek esetében — a puristák vétójától, a kik rendesen avval hozakodnak elő: «ilyen vagy amolyan szó nem létezik».[1]

A világnyelv ezeknek révén szert tehetne oly gazdagságra és hajlékonyságra, hogy e tekintetben vele egyetlen élő nyelv sem vetekedhetnék, az élesen meghatározott képzőinek segítségével képes lenne oly

---

inkább mint *soulier*, *danken (thank)* inkább mint *remercier*, *senden (send)* inkább mint *envoyer*.

[1] Különösen kivánatos, hogy egy ugyanazon gyökből mindig a főnevet, melléknevet és igét lehessen képezni.

szókat is élesen megkülönböztetni, a melyeket a mi nyelveink folyton összekevernek.[1]

A beszédrészek megkülönböztetése.

A felsorolt előnyökhöz még a következő járulhat. A különböző beszédrészek, alakjuknak élesen különböző voltával oly határozottan volnának jellemezhetők, hogy a szóban első tekintetre vagy első hallásra fel lehetne ismerni azoknak főnév, melléknév, ige vagy határozó voltát. Ez oly előny, melylyel egyik természetes nyelv sem dicsekedhetik s a mely a beszédnek érthetőségét kiváló mértékben fokozná. Mivel ugyanis minden szó a mondatban viselt szerepét már alakjával árulja el, a logikai constructio habozás nélkül végezhető. Ha pedig valamely szó még ismeretlen lenne, akkor már felismerhető grammatikai alakja megsegítene értelmének kitalálásában; de sőt a megértésére gyakran már a szó szereplésének ismerete is elegendő.

Helyesirás és kiejtés.

A világnyelvnek másik — egyéb nyelvekben alig található — előnye a szigorúan phonetikus helyesirása. A kiejtés teljesen az irásnak megfelelő lesz. A szónak minden betűje kiejtendő és hangzása a szónak bármely helyén vagy bármely más betű szomszédságában is mindig ugyanegy legyen. Ezzel a kiejtés nemcsak egyszerűvé és könnyűvé lesz téve, hanem a lehetőség szerint egyöntetűvé is lesz. Az ABC csak oly hangokat öleljen fel, melyek az összes európai nyelvekben előfordulnak, de kizárjon olyanokat, a melyek csak egyes európai nyelvekben fellelhetők és a melyeknek kiejtése idegeneknek nehézséget okoz.[2] Egyszerű, határozott hangokból álljon és ne tartalmazzon olyanokat, melyek pontatlan kiejtés folytán egymással összetéveszthetők (ilyenek a hosszú, rövid, nyilt magánhangzók). Ugyanezen oknál fogva hasonló hangzású szavakat is ki kell zárnunk; még kevésbbé tűrhetők meg a homonymák, mint pl. Thor és thor, patte és pâte, ship és sheep. Minden szónál még arra is kell tekintettel lennünk, hogy az alig elkerülhető kiejtésbeli különbségek kétértelműségekre ne vezethessenek. Egyszóval a

---

[1] Pl. ez a szó Handlung jelenti magát a cselekvést, olykor a cselekvés eredményét, máskor még a cselekvés helyét is.

[2] Pl. a franczia *u*, az angol *th*, a német *ch*; persze az R betű nem nélkülözhető, a volapük is csak azért zárta ki, mert a chinai nyelvben nem fordul elő.

világnyelvben «*calembour*»-ok lehetetlenek legyenek. Ily körülmények mellett a kiejtésbeli csekélyebb különbségeknek — a mint ezt különben már a tapasztalat is igazolta — alig van befolyásuk és zavaró hatásuk egyáltalában nincsen. Mindenesetre kisebb lesz a kiejtésbeli különbség, mint az, melyet két különböző nemzethez tartozónál tapasztalunk, midőn egy ugyanazon az idegen nyelven beszélnek s nem fogja felülmulni azt, melyet nyelvközösségben élők tájszólásaiban találhatunk.

Néhány ellenvetés czáfolata.

Egyikét a leggyakoribb ellenvetéseknek, azt mely a különböző országok népeinek különböző kiejtésére vonatkozik, épen az imént czáfoltuk meg. Még két-három más ellenvetéssel kell végeznünk, először azokkal a melyek nemzetközi szótárnak még lehetőségét is tagadják.

Azt hangoztatják, hogy a világnyelv az *idiotismusokat*, minden nyelvnek különös fordulatait és hasonlatait, nem fogja reprodukálhatni. Nos hát ez kétségtelenül így is van; hiszen az idiotismus definitiója szerint épen oly beszédmód, a mely csak *egy* nyelvben fordul elő. De ilyeneket idegen nyelvre lefordítani egyáltalában lehetetlen. Hát megpróbálta-e már valaki a «*tiré a quatre épingle*» franczia idiotismust szószerint németre vagy angolra lefordítani?

De még a franczia ember is, midőn idegennel beszél, az ilyen magyarázatra szoruló fordulatokat kerüli és arra törekedik, hogy magát érthetően és leplezetlenül kifejezze, azt mondván: *correctement* vagy *élégammant vétu*. Szóval arra kényszerül, hogy szavait ne csak németre vagy angolra, hanem a francziából francziára lefordítsa. De akkor egyáltalában sem lehet nehezebb ily kifejezéseket ilyeténképen a világnyelvre is lefordítanunk. A kifejezés sokoldalúsága ezzel ugyan veszít valamelyest, de ugyanannyit nyer szabatosságban és világosságában.

Az idiotismusokon kívül akadnak még egyéb árnyalatok és finomságok, a melyeket a világnyelvre lefordítani nem lehet.[1] Itt is azt válaszolhatjuk, hogy mi közük van ezekkel a többi nyelveknek? Az összes élő nyelvekkel szemben a világnyelvnek még mindig megmarad az az előnye, hogy az ily árnyalatok — a mennyiben logikus és hasznos megkülönböztetések jelölésére szolgálnak — ő reá mindig le lesznek fordíthatók. Természetes nyelvben ez lehetetlen, ennek ellene szegül a nyelv «szelleme». Ha igazságosan akarunk itélni, akkor a világnyelvet ne anyanyelvünkkel, hanem oly idegen nyelvekkel hasonlítsuk össze, a melyek-

---

[1] Így pl. az orosz nyelvben a «valami» fogalmának négyféle kifejezése van, melyet e fogalom különböző árnyalatai szerint használnak.

nek pótlására az hivatva van és melyeknek külön megtanulásától bennünket megkimélne.

A műszók.

A legfőbb ellenvetés, a mely tehető, az, hogy az egyes nyelvekben a szavakkal kifejezett fogalmak megegyezésének tökéletlensége egészen az értelmük eltéréseig fokozódhatik. Ezt a nehézséget, a mely minden fordító munkálat nehézségeinek és tökéletlenségének okozója el kell ismernünk. De viszont az is igaz, hogy ez a fogyatkozás nem egyedül a világnyelv rovására irható; valamely szövegnek lefordítása élő nyelvből a világnyelvre, semmivel sem nehezebb, mint akár egyik élő nyelvből a másikra. Hát hogyan kivánhatjuk meg, hogy a világnyelvnek oly előnyei legyenek, melyekkel az élő nyelvek egyike sem dicsekedhetik s a melyek épen ezeknek különböző voltánál fogva elérhetetlenek? Ha pedig a nyelvek különbözősége okozta akadályok legalább részben leküzdhetők, akkor bizonyosak lehetünk az iránt, hogy a világnyelv erre képes lesz. Mert ebben a szavaknak értelme pontosan van definiálva; a kifejezéseink többértelműsége különböző szók alkalmas választásával kiküszöbölhető, a mivel egyszersmind minden kétértelműséget is elkerülhetünk, de mindenekelőtt megszabadíthatjuk ezeket amaz eszmetársulásoktól, melyek a mindennapi élet nyelvében önként keletkeznek és az értelmet megzavarják vagy el is torzítják. Végül ne feledkezzünk meg arról sem, hogy a világnyelv főkép tudományos és commerciális czéloknak szolgálatára van rendeltetve. De épen a tudományos és műszaki fogalmak teljesen nemzetközi jellegükkel válnak ki, azaz hogy mindenekelőtt ugyanaz az értelmük, mert különben nem lehetnének tudományosak vagy tárgyilagosak.

Különben is a technikai kifejezések szótárait oly bizottságok szokták késziteni, a melyek a megfelelő szók értelmének megállapítása mellett egyúttal a hozzá tartozó fogalmak pontos definitióját adják. Így pl. a philosophia ily szótárának készítését a nemzetközi philosophiai congressus néhány tagja hozta javaslatba és a franczia nyelvűnek készítését az 1901-ben alakult *Société française de Philosophie* vállalta magára. Az egyes nyelvek philosophiai és tudományos szótárainak összehasonlítása alapján készülnek azután természetszerűen a nemzetközi philosophiai és tudományos szótárak. Míg e munkálatok egyrészt a világnyelvre hasznosak, addig e haszon bőven vissza fog háramolni a philosophiára és a tudományokra, a melyek a világnyelvben egy az összes létező nyelveknél logikusabb, világosabb és tökéletesebb organumot nyernek, mint a minőt bármely nemzetnek nyelve nyújthatna.

Nyelvtan és mondattan.

A mi a grammatikát és syntaxist illeti, ezek a szükséges minimumra redukálandók. Nem hinné az ember, hogy ebben a tekintetben mekkora egyszerűséget és szabályosságot lehet elérni. A különféle nemeknek az idegent annyiszor megzavaró megkülönböztetése teljesen nélkülözhető (kivéve a személyes névmásokat és a harmadik személy possesivpronomiát). Az igéket felesleges szám és személy szerint conjugálni, mert hiszen az alany már kifejezi a szükséges tudnivalókat. Ezen kívül még szükségünk van néhány képzőre vagy ragra, a melyekkel a többes számot, az időt, modust és a participiumot képezzük, mindössze husznál kevesebbre, melyeknek mindegyike egyöntetü és állandó lehetne. De clinatio egyáltalában nincsen, conjugatio alig van, rendhagyó főnevek és igék egyáltalában nincsenek! Az ilyen grammatikát bárki egy óra alatt teljesen megtanulhatja s e mellett mégis képes lesz a gondolat összes árnyalatainak kifejezésére, sőt többnek kifejezésére is, ama szigoru logikának megfelelően, a melylyel a tempust és modust szabályozni lehet.[1]

Tehát MAX MÜLLER-rel kimondhatjuk, *hogy alkotható oly mesterséges nyelv, mely sokkal szabályosabb, tökéletesebb és könnyebben elsajátítható, mint az emberiségnek bármely természetes nyelve.*

Az imént vázolt programm némely olvasó előtt talán nagyon kalandosnak tűnik fel, de valójában nem soroltunk fel egyetlen egy követelést sem, a melyet a meglevő mesterséges nyelvrendszereknek valamelyike már meg nem valósított volna.

A világnyelvnek csak tulajdonságait és előnyeit, a minimum exigibile-t, adtam elő és e mellett lehetetlent sehol sem igértem, mert ezt már a valóban létező nyelvek elérték. Nem tudom, hogy e mellett elértem e a tökély fokáig, hiszen minden emberi mű tökéletesíthető. De jobbnak hiján, elégséges e nyelveknek csak egyikét elfogadni, hogy magunknak az összes előnyöket biztosítsuk, melyeket a fentiekben kiemeltünk. Én tehát nem csak azt állítom, hogy világnyelv lehetséges ; hanem azt is, *hogy ilyen van már és ha akarjuk már holnap rendelkezhetünk vele.*

---

[1] Már LEIBNIZ mondja : a præpositiók feleslegessé teszik a casust, a conjuntiók a modust. Néhány világnyelv szerzői a conjunctivust feleslegesnek tartják. Semmi esetre sem szabad a tempust és modust conjunctiókkal vagy egyes szabályokkal önkényesen megállapítanunk, hanem kizárólagosan az értelem alapján kell ezeket szabályoznunk.

Természetes vagy mesterséges nyelv.

A mesterséges nyelv eszméjével szemben azt szokták felhozni, hogy a nyelvek a népszellemnek spontan termékei és így parancsra vagy egyezkedés utján sem teremthetők. Ez azonban csak hamis inductio, mely történeti tényből szükségszerű törvényt akar alakítani; ha ugyanis idáig az összes nyelvek ilyen úton keletkeztek, ebből még sem következtethető, hogy erre már más mód nincsen. Valaki, a ki csak a mi régi európai városainkat ismeri, hasonlóan okoskodván, azt állíthatná előre megállapított szabályos terv szerint város egyáltalában nem építhető; pedig Amerika elég példát nyujt erre is. Nemzetközi rendszerek valóban léteznek; ilyenek a számjegyek, az algebrai jelek, a chemiai formulák, a zenei koták, a hajózás jelei, és bár mindannyiok mesterségesek, a megszokás folytán már természeteseknek találják őket. Ugyan ez áll a telepraphia Morse-jegyeiről, a süketnémák jegyeiről, a vakok Braille-féle betüsoráról; mindezek megegyezés és feltalálás utján keletkeztek, de mindazonáltal a minden nap velük élőknek a gondolatok spontan kifejezésének alkalmas eszköze gyanánt bizonyultak. Az előbb említett inductio-következtetésnek tehát alapja nincsen, sőt ellenfeleink ellen fordítható. Valóban nincsen neki sem tudományos, sem logikai értéke, mert végelemzésben arra a tételte lyukad ki, hogy «*ez nem létezik, mert még ilyent sohasem láttam*». Ez a routine argumentatiója, de minden haladásnak tagadása. Tíz évvel ezelőtt ugyanezzel az argumentatióval bebizonyíthatták volna, hogy drót vagy egyéb anyagi vezeték nélkül sohasem lehet majd telegrafálni, vagy hogy az élő emberi testbe sohasem lesz lehetséges beletekinteni, mert hiszen «*ilyen sem volt még*». Midőn Francziaországban az első vasut építésébe belefogtak, komoly és magukat autoritásoknak tartó emberek akadtak, akik tudományosan be akarták bizonyítani, hogy a lokomotiva sínen járó vonatot sohasem lesz képes vontatni, ez pedig oly időben történt, midőn Angliában a vonatok már hosszabb idő óta jártak. A világnyelv lehetőségének tagadói veszélyben forognak, hogy ebbe a társaságba jutnak.

Hát szabad e a mesterséges nyelvet a mi természetes nyelveinkkel ellentétbe helyezni? Hát megfeledkeztek róla teljesen, hogy az összes európai nyelvek is java részükben gondos és lelkiismeretes kidolgozásnak eredményei? Ha a franczia nyelv összes mesterséges szóalkotásait el akarnók távolítani, akkor a szótárából az összes műkifejezéseket («de formation savante»), azaz az összes 27,000 szóból 21,000-et kellene elhagyniok. A nyelvtan számos szabálya nem a néphasználatnak, hanem inkább egyes irók és grammatikusok phantasiájának köszöni létezését.

Hát mi lehet még ennél is mesterkéltebb, mint az az eljárás, mely a szavakat genus szerint a főneveket declinatio és az igéket conjugatiójuk szerint különböztetni meg? Valóságban a nyelvek mindegyike teljességgel mesterségesnek tünik elő annak, a ki ezt meg akarja tanulni, és a gyermekek és az idegenektől elkövetett hibák rendszerint olyanok, hogy ezeknek befogadásával a nyelv logikussága csak nyerhetne. A számos rendellenességben és különösségekben leledző spontan alakult nyelvekkel szemben, logikai alapon szerkesztett mesterséges nyelv nemcsak, hogy százszor egyszerűbb és könnyebb, de még valójában természetesebb és rationalisabb is lesz.[1]

A nyelvek fusiója.

Vannak olyanok is, a kik a világnyelv eszméjét különben pártolják, de úgy vannak meggyőződve, hogy ez a czivilizált nyelveknek «természetes fejlődési folyamat» alapján való egybeolvadásából fog keletkezni. Ez azonban csak önámítás, még pedig a veszedelmes fajtából. Sokkal eltérőbbek a nemzeti nyelvek, semhogy egymás felé közeledhetnének vagy plane egymásba olvadhatnának; érintkezésük és versenyük alapvető eltéréseiket és irreducibilis eredetiségeiknek csak még jobb kidomborítására vezetnek. És ha mégis, ki tudja hány száz év mulva, egybeolvadás bekövetkeznék, akkor ennek terméke talán valamivel egyszerűbb és kényelmesebb, de ép annyira szabálytalan és logikátlan lenne, mint bármely ma létező nyelv, mert hiszen épúgy mint ezek spontan fejlődés eredménye lenne. Olyanféle sabir- vagy néger-angol lenne ez, a helyett hogy a szükséges logikus (de nem philosophiai) nyelvet kapnók. Végül általános nyelv, tehát hiú ábránd lenne. Hát ennek áldozzuk fel a világnyelvet, melyet közvetetlenül megalkotni és használatba venni lehetne?

De a tőlem megczáfolt nézet még más argumentumokkal is hozakodik elő; nyelvek élő lények és az életet pedig sem utánozni, még kevésbé pedig megteremteni nem lehet etc.

De e mélységes szemlélődések mindannyian csak költői képek,[2] a melyek felszines philosofális eredményei és hamis liberalismus leple alatt valójában radikális fatalismust lepleznek. A *természetnek* ilyen imádása valójában minden emberi tevékenységet szüntetne meg. A mű-

---

[1] «Was die Sprachen gewollt haben die Sprachen zerstört (H. SCHUCHARDT Weltspache und Weltsprachen, 1894, 37. l.)

[2] «Die Sprache ist kein Organismus, sondern die Funktion eines Organismus» HUGO SCHUCHARD: «Die Sprache ist kein für sich bestehender Organismus, sondern ein Werkzeug, das sich die Menschen zu bestimmten Zwecken hergestellt haben.» W. OSTWALD, Naturphilosophie p. 35 (1901).

vészeteknek éppenséggel abban áll a feladatuk, hogy megmutassák, hogy a természetes dolgokat mesterségesen utánozni hogyan lehet, ilyen a táncz az ének, sőt még a *szó* is. De nemcsak a művészet, hanem az ipar, sőt a teljes művelődés is Bacon ama definitiójának felelnek meg: *homo additus naturae.* Az embernek előjoga, hogy a természetet vezesse, megjavítsa, szükséghez mérten tökéletesítse és magának alávesse Hiszen emberi alkotások tekintetében a haladás mindig abban áll csak, hogy bizonyos *természetes* folyamatokat *szándékolt* folyamatokkal pótoljunk épugy a mint az ösztön helyébe a meggondolás lépett. Tehát nem bolondítassuk el magunkat a «természet», az «élet», a «fejlődés» babonás imádói által; ezek csak sophismák vagy a tehetetlenség kifejezői. Olyannak tünik ez fel, mint akár csak pl. meg akartuk volna várni, a míg a természet a maga jóvoltából átvágja a Suez földszorosát vagy megfúrja a Gotthard alagútját.

A nemzetközi egyezség.

Végül még azt az ellentevést is teszik, hogy lehetetlenség conventionalis nyelvnek nemzetközi megegyezés alapján az általános elfogadást biztosítani. Itt is tényekkel adhatjuk meg a választ. A már felemlített jelrendszereken és a tengerhajózás nemzetközi code-ján kívül még számos egyéb nemzetközi berendezkedést ismerünk (a tizes számrendszert, a körkerületnek és az időnek beosztását, a gregorianus kalandariumot, a méterrendszert, a *c-g-s*-egységeket, chemiai elnevezéseket és képleteket stb.), a melyeket czélszerüségök és kényelmes voltuk miatt a földnek majdnem összes népei elfogadták. Ha van ezek között olyan is, melyek az érdekelteknek önkéntes és nagyobbodó megegyezése alapján keletkezett, egy részüket mégis hatóságok bizonyos időtől fogva elrendelték vagy tudós testületek és congressusok egyeztek meg bennök. Az egységesítésre való törekvés oly erős, hogy pl. egyik Párisban tartott congressus szükségesnek találta, hogy a czérnaszálak számozása egységes megállapításának kérdésével foglalkozzék. Hát épen csak a tudomány és kereskedelem nyelvének egységesítése kérdésében nem lehetne megállapodásra jutni, hiszen ez az összes eddigi conventiókat betetőzné?

A létért való küzdelem.

Még el kell döntenünk, hogy ez a lehetséges egyezség szabad megegyezés, vagy autoritarius döntés alapján jöjjön-e létre. Végül is a különböző világnyelvek propagálása és természetes versenye alapján talán legkönnyebben dönthetnők el a kérdést, hogy melyik az, a mely közülök mint a legjobb, legkönnyebb és legkényelmesebb, végül diadalra jutna. De ez a *létért való küzdelem* hosszú ideig tarthat, és talán befejezésre sohasem jut. Mert valójában a különböző világnyelvek nem is versenyeznének egymással, ugyanis mindegyikük a maga részéről gyűjtené a híveit, a kik egymást sem nem látják, sem nem ismerik. Csak igen kevesen volnának olyanok, a kik több ily nyelvrendszert ismervén, azoknak értékét mérlegelhetnék és ezen az alapon választhatnának. Az érdekeltek többsége csak egy-egy ily rendszert ismer, melynek elveit elfogadta de a melyhez csak a véletlen útján jutott. Ha tehát e különböző rendszerek sikert aratva érvényesülnének, az eredmény ismét az lenne, hogy az összes czivilizált államok népei ugyanannyi nyelvcsoportra oszlanának a hány ily világnyelv el van terjedve s ezeknek versengése semmivel sem volna üdvösebb, vagy kevésbbé szenvedélyes, mint az, melyet a nemzeti nyelvek körül tapasztalunk. A helyett, hogy az egyik meglévő babeli tornyot lebontottuk volna, ujat s még tartósabbat emelnénk, mert a világnyelvek egyike sem lenne kész, magát a másiknak alávetni s ezzel arra, hogy saját inferiorítását elismerje. Csak souverain döntés vethetne vége e harcznak, de még ezzel sem érnének czélt, mert a ki a világnyelvek közül valamelyiket fáradsággal már elsajátított, aligha szánná rá magát arra, hogy most már másikat tanuljon mng, még akkor sem, ha ez könnyebb vagy tökéletesebb is lenne.

Circulus vitiosus.

Sokkal czélirányosabb ezt az ügyet addig dülőre vinni, a míg a különböző világnyelveknek követői az érdekeltek összességével szemben elenyésző kisebbségben vannak. Mert az eddig tapasztalt közönynek alapos oka van; senki sem szánja el magát világnyelvnek elsajátítására, mielőtt ennek hasznát látná, azaz mielőtt még a többiek meg nem tanulták. De hát hogyan bontakozzunk ki ebből a *circulus vitiosusból?* Minden érdekelt csak akkor lenne hajlandó világnyelv megtanulására, ha ez valóban nemzetközi nyelv lenne. De honnan tudja meg, hogy melyik az igazi, a valódi világnyelv? Ki biztosít arról, hogy a míg az egyik nyelvet elsajátítjuk, az alatt nem adnak-e előnyt másiknak? Különben is *Volapük*-nek sikertelensége a világnyelvek iránt bizalmatlanságot és igazságtalan előítéletet keltett. A *Volapük* első gyors és fényes sikereit annak a körülménynek köszönhette, hogy igazi szükséglettel találkozott, különösen a kereskedelmi körökben, de saját hibáin, t. i. gyökszavainak kevéssé nemzetközi voltán kellett tönkre jutnia.[1]

---

[1] Ki sejtené pl., hogy még maga a *volapük* szó is két angol szónak a *world* és *speak* szavaknak összetétele?

Es így, míg sikere az elv helyessége mellett tanuskodik, tönkrejutása nem ellenérv. Talán nem eléggé ismeretes, hogy a volapükot a sokkal praktikusabb *esperanto* [1] szorította ki a használatból, (legelőször a nürnbergi volapük-egyesületben történt), hogy ezt azután pótolja és hogy a nemzetközi volapük-congressustól a volapük megjavítása czéljából alapított világnyelv-akadémia egészen új nyelvet (Idiom neutralt) dolgozott ki, mely inkább az esperantora mint a volapükre hasonlít.[2] Nem szabad tehát a helyzetet reménytelennek tekintenünk; óvakodnunk kell a világnyelv ügyét, megvalósításának eddigi többé-kevésbbé fogyatékos kisérletei alapján megitélni. Minden találmány, még a legszerencsésebb is, kezdetben a próbálgatás és balfogások időszakát éli át; melyik kerékpározó volna kész arra, hogy draisinre vagy oly magas kerékre ráüljön, a minőket még csak husz év előtt láttunk.

A megoldás.

Két kérdést kell tehát élesen széttartanunk: *az elv kérdését* és *a kiválasztás* kérdését. Ma csak az első kérdést állítjuk napirendre. Csak ez érdekli a nagy közönséget és ez csak erre adhatja le a szavazatát. Mi az a mit összeségben kivánunk? Gyakorlatias és mindenekelőtt *egyetlen* világnyelvet. Ha ez talán csak középszerű is lesz, még mindig jobb lesz mint több olyan tökéletes, a mely közül egyik sem nemzetközi. A kiszemelést tehát nemzetközi testületre kell biznunk, melynek meg van a szükséges illetékessége és tekintélye, hogy döntését az összes érdekeltek elfogadják és csatlakozásra késztesse.

Nos hát ilyen testület létezik; ez az Akadémiák Nemzetközi Szövetkezete. Nincs ennél tekintélyesebb testület, a mely inkább volna hivatva a kérdéses döntést meghozni. De arra, hogy e kérdést felkarolja, szükséges, hogy az összes érdekeltek őt erre késztessék. Ebben az értelemben hívjuk fel az összes nemzetek tudós társulatait, kereskedőit és utazóit, hogy szavazatukat ily értelemben adják le és hogy képviselőiket kiküldjék, a kik azután a feladatot az akadémiák nemzetközi szövetkezetéhez felterjesztenék. Ha ez a szövetkezet megtagadná, hogy e feladattal foglalkozzék, akkor ez egy a comissiótól megválasztandó comité-ra volna átruházandó; ennek mint az összes érdekelteknek (bizonyos tekintetben

---

[1] V. ö. Einstein, *La Lingeo internacia als beste Lösung des Weltspracheproblems . . . nach dem Entwurf des pseudonymen Dr. Esperanto* (Nürnberg, Schiener, 1888).

[2] V. ö. Rosenberger Wörterbuch der Neutralsprache (Leipzig, Haberland, 1902).

másodfokú) representansának elég tekintélye volna, hogy döntésének sikert biztosítson. Természetes, hogy ezt a bizottságot (comité) csak csekély számú, de elismert illetékességű és pártatlan férfiakból kellene megalakítani, esetleg olyanokat is befogadva, kik a comission kívül állanak. Ily módon az összes csatlakozó társulatok határozatai figyelembe volnának vehetők. Sőt ha a társulatoknak egy kisebbsége, esetleg egy egész nemzet e nemzetközi szavazásban részt venni nem akarna, teljesen elegendő volna, hogy a nemzetközi nyelvet a szavazásban résztvett társulatok és nemzetek használják, mert ekkor a többiek már önmaguktól fogják használni. Erre majd saját érdekükben kényszerülnek, mert míg a világnyelv használata kétségtelenül előnynyel jár, addig az ettől való elzárkózás érezhetően háttérbe szorítaná őket.

Befejezés.

Kétségtelen, hogy az egyes egyéneknek és egész népeknek a világnyelvvel kapcsolatos érdekein még felül állónak kell tekintenünk azt a benne rejlő egyetemes emberi mozzanatot, melyet a tudós és philosophus bizonyára benne méltatni tud. Kiemeltük már, hogy a világnyelv szüksége a nemzetközi érintkezés hallatlan fejlődésének folyománya. De megfordítva egy világnyelv teremtése ezt az érintkezést még bensőbbé és több oldaluvá fogja tenni. A szellemi és anyagi javak kicserélését egyszerre fogja élénkíteni. A tudós gyorsabban és közvetetlenebbül fog tudomást szerezhetni az összes országok találmányairól és haladásairól; közülök mindegyik összes szaktársainak összes kutatásait fogja felhasználhatni, felesleges munka és időpazarlás nélkül. Erősíteni fogja azt az egyetértést, mely tudományos munkálatok megosztásának szervezésére szükséges és mind jobban meg fogja valósítani a tudomány egységét; ebben pedig az emberi szellem egysége fog tükröződni. Sokszor hallottuk, hogy a nemzeti nyelveknek erkölcsi és intellektuális tartalmuk is van, mert benne a nép szelleme, karaktere, lelke tükröződik; ám a világnyelvnek még gazdagabb és becsesebb tartalma lesz: ez ama philosophiai és erkölcsi eszmék összesége tudományban és praxisban, melyek az egész emberségnek osztályrészét kiteszik.

Túlzott dolog volna azt a reményt táplálni, hogy a világnyelv csakhamar testvéri érzésekkel töltené el a népeket és hogy megszüntetné a népek véres czivódásait, hogy az ő révén az erőszak uralma helyébe a jog uralma lépne. De azért elő fogja segíteni a népek jobb megismerkedését; többször fogjuk egymást meglátogatni, meg fogjuk egymást érteni, egymást megbecsülni, egymást kimélni. A világnyelv sok előitéletet és félreértést oszlatna szét, és míg a kölcsönös vonatkozások szálait erősítené, az egymás iránti jó akaratot fokozván, a békét és egyetértést is meg fogja erősíteni. «Őseink csak a családi, városi és a népek solidaritásának tudatát tudták felkelteni, reánk maradt, az emberiség öntudatát megteremteni.»[1] Ez a már mutatkozó és fejlődésnek indult emberségi öntudat a világnyelvben nélkülözhetetlen organumot és segédeszközt találna. E nagy haladás gyorsításához mindannyian hozzájárulhatunk a magunk részével, és e haladás fontossága a nyomtatás felfedezésével vetekedő korszaknak beköszöntője, a tudomány és a civilisatio hatalmas fejlesztője lesz.

Louis Couturat
a toulousi egyetemen a philosophia tanára
a nemzetközi philosophus-congressus tagja
(Paris, 1900 augusztus havában).

Comissio

Nemzetközi segédnyelv behozatala ügyében

Nyilatkozat.

Az alulirottak különféle congressusok és társulatok megbizásából egy a nemzetközi eszmecserét szolgáló nyelv behozatalának kérdését tanulmányozván, a következő pontokra nézve jutottak megállapodásra:

I. Kivánatos oly nemzetközi nyelv használata, a mely a nélkül, hogy az egyes népek belső életében használt nemzeti nyelv pótlására hivatva volna, különböző anyanyelvű egyének szóbeli és irásbeli érintkezésére alkalmas legyen.

II. Hogy ilyen nemzetközi nyelv feladatának megfelelhessen, a következő feltételeket kell kielégítenie:

1) Kell, hogy úgy a mindennapi élet, valamint a kereskedelem, forgalom szükségleteit szolgálhassa.

2) Átlagos műveltségű, különösen az európai művelődés körébe tartozó személyek által könnyen legyen elsajátítható.

3) Nem szabad, hogy az élő nyelv legyen.

III. A commissiónak feladata további delegatusok felvételével magát kiegészíteni, abból a czélból, hogy a lehetőség szerint, a nemzetközi nyelv

[1] BOUTROUX-nak a nemzetközi philosophus-congresszuson 1900 aug. 1-én tartott megnyitó beszédéből (Revue de Métaphysique et de Morale VIII, 510; Bibliotèque du Congrès I, XXI, Paris, A. COLIN).

kérdésében érdekeltek összesége képviselve legyen. Feladat a továbbá comité-nak kinevezése, a melynek tagjai abban a helyzetben vannak, hogy hosszabb ideig folyó üléssorozatban személyesen is részt vehessenek.

IV. Annak a kérdének eldöntésére, hogy az említett czélra szolgáló nyelvek közül melyik fogadtassék el, első sorban az *Akadémiák Nemzetközi Szövetkezete* van hivatva s csak akkor, ha ez ezt a kérdést magától elutasítaná, szállana át a döntés feladata a III. czikkben említett *comité*-ra.

V. A comité feladata tehát mindenekelőtt az érdekelt congressusok és társulatoktól adott nyilatkozatokat az Akadémiák nemzetközi szövetkezetének azzal a kéréssel előterjeszteni, hogy ez a maga részéről a nemzetközi segédnyelv tervének megvalósításához hozzájáruljon.

VI. A comité további feladata oly társulatnak megalapítása, a mely a kiszemelt nyelv általános elfogadása ügyében működnék.

VII. Az alulirottak, a kiket különböző congressusok és társulatok delegátusaikká már kinevezték, az összes tudós-, kereskedelmi és turista társulatokhoz azzal a kéréssel fordulnak, hogy a fentebb kifejtett tervhez való hozzájárulásukat és csatlakozásukat kifejezzék.

VIII. A *comissióba* minden oly szabályszerűen megalakított társulat küldhet delegatusokat, a mely a terv eszméjéhez való hozzájárulását már kifejezte.

N. B. Ez a nyilatkozat a comissiónak, egyszersmind hivatalos programmja. Ez magában foglalja ama társulatok munkaterveinek alapeszméit melyek a Comissio-hoz tartoznak.

Az 1900. évben megalakult Akadémiák nemzetközi szövetkezete felöleli a következő akadémiákat, illetve tudós társaságokat: Amsterdam, Berlin, Brüssel, Budapest, Göttingen, Kopenhagen, Kristiania, Leipzig, London (Royal Society), München, Paris (Akadémie des Sciences, A. des Sciences morales, A. des Inscriptions) Petersburg, Roma (A. dei Lincei), Stockholm, Washington és Bécs. Minden három évben tartja közgyűlését (Párisban 1904) és a közbe eső időben a comité képviseli. A szövetkezett akadémiák egyikének vagy többjének internationalis vállalkozásokra vagy kutatásokra vonatkozó indítványára a közgyűlés vagy két közgyűlés közötti idő alatt a comité nemzetközi különbizottságokat küldhet ki.

(Az alapszabályok 10. §.)

P. S. *A comissio munkálataiban való részvételt oly irányban kérjük, hogy: 1. hogy az eszme terjesztése előmozdíttassék, tudományos társulatok, kereskedelmi és iparkamarák és congressusok delegatusaiknak kiküldésére ösztönöztessenek. Ezek sem utazásra sem költségekre nem kötelesek, kötelezettségük kizárólagosan a jövő comité* *levél útján történő választására, továbbá a comissio működéséről való jelentés tételére szorítkoznék.*

2. A propaganda költségeihez való hozzájárulás: a kik 5 frank (4 márka, 5 korona) meghaladó összeggel járul hozzá, az a comissio nyomtatványait bérmentesen kapja.

A comissio jegyzője dr. L. Lean, 6, Rue Varin Paris VI.

A pénztárnok dr. L. Couturat, 7, Rue Nicole, Paris V.

(Fordította *Rados Gusztáv*).

EGY UJ PASSAGE PRISMA.

Előadatott a *Mathematikai és Physikai Társulat* 1906 deczember 6-án tartott rendes űlésén.

A hetvenes évek vége felé WEISS, a wieni csillagda igazgatója kezdeményezésére hazánkban is megindítottuk a hullócsillagoknak intensivebb módon történő megfigyelését, s ezen újból szervezett állomások megfigyeléseinek főczélja az volt, hogy több állomáson lehessen egy és ugyanazon hullócsillagot mérni s a két vagy több helyen történt magasságmegfigyelésből azután a hullócsillag elemeit levezetni. Ezen hálózat azonban nem felelt meg a hozzá fűzött reménynek.

Nem az a feladatom, hogy most annak okait kifejtsem, s csak annyit akarok megjegyezni, hogy ezen állomásoknál a legtöbb kivánnivalót a pontos idő hagyta hátra.

1905-ben újból felelevenítettem a correspondeáló megfigyeléseket, s kisérletképen Ó-Gyallán és Tata melletti nagy-tagyosi birtokomon eszközöltünk megfigyeléseket, mely Ó-Gyallától 35 kilométernyire fekszik dél felé. Az első megfigyelési sorozatot a juliusi rajnál végeztük, elég jó sikerrel 1905-ben.

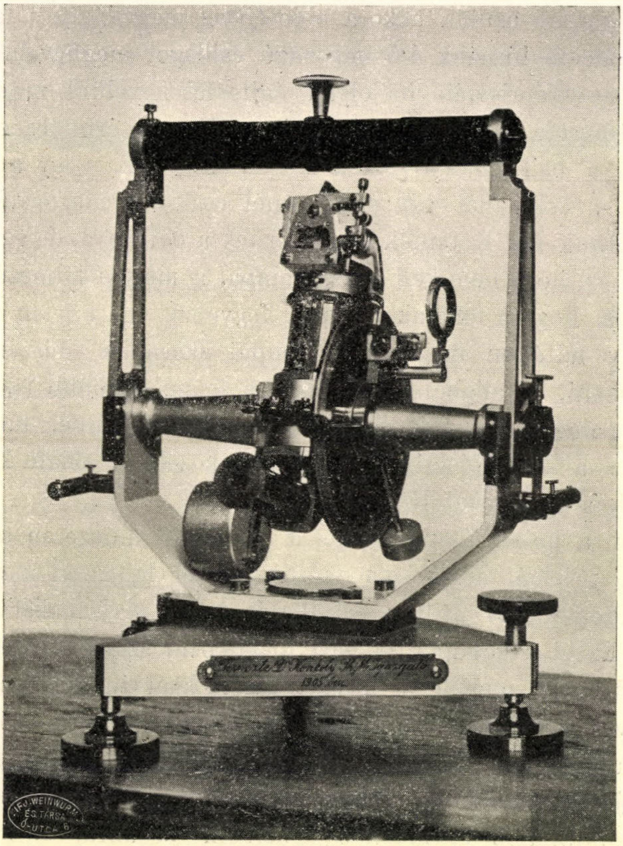
Tagyoson azonban semmiféle eszközünk nem volt, melylyel időmeghatározást végezhettünk volna, tehát kénytelen voltam az órát (egy különben kitünő St. Jean-féle «rattrapante») szabadjára hagyni, s azt minden este a megfigyelés előtt Ó-Gyallával összehasonlítani. Telefonunk nem lévén a puszta helyen, az EMMERLING-czégnél magosan felszálló röppentyűket készíttettem, melyek 260—280 méter magasban nagyot lobbantak (magnesiumporral). Ezen lobbanások, mivel Tagyos már magában vagy 80 méterrel magasabban fekszik mint Ó-Gyalla, igen könynyen voltak megfigyelhetők, s az óraidő épúgy Ó-Gyallán mint

Tagyoson fel lett jegyezve a lobbanás pillanatában, s utólagosan reducálva a megfigyelésekre.

Bár ezen eljárás egészen jól bevált, de kissé költséges volta miatt elhatároztam valami egyszerű kis műszert késziteni a végből, hogy 1906. évben már az időt magunk határozhassuk meg. Az első gondolatom egy PLÖSSEL-féle passageprismára irányult, de annak rendkívül kezdetleges voltával sehogy sem tudtam megbarátkozni, mert eltekintve a PLÖSSEL-féle bádogos munkától, abban annyi hiba van, a mennyi csak belefér. Némi meggondolás után azután beláttam, hogy hiszen a távcső tengelyének valahogyan meg kell lennie, hát akkor miért ne csináljam azt hosszabbra, hogy azt nivellálni is lehessen? Ki kezeskedik arról, hogy a PLÖSSEL-féle műszernél a prisma hypothenusának felülete tényleg a távcső tengelyében áll? Efféle hiba még elég van ezen valóságos «vaczakon».

Az első ábra mutatja a kis műszert az északi oldalról, mely æstethikailag talán némi kivánni valót hagy hátra, de legyen neki megbocsájtva ezen bűne, hogyha megmondom mily pontos eredményt lehet vele elérni, s hogy a műszernek $^9/_{10}$-része a lomtárból lett próba gyanánt összekeresve. Így példának okáért talapzatnak egy Lamont-féle theodolith három lábának a teteje volt kiszemelve. Nem volt vasmentes: a lomtárba került. A villa, a mely a tengelyt tartja, a tengely és a libella egy régi SCHNEIDER-féle theodolith maradványai, a mely a kilenczvenes években át lett alakítva phototheodolithtá. A libella új lábakat kapott s végezi szolgálatát. Egy 25 mm-es objectivum és egy derékszögű prismám megvolt, s csak egy derékszögű oculárt vettem hozzá Hensoldtnál Wetzlárban, s megvolt a kis műszerhez minden, úgy a beállitó kör is a lomtárból került elő más egyébbel együtt.

Az objectiv elé egy gyűrűn két *A* forma állvány van felerősitve, mely a prisma foglalatát tartja. Ennek a foglalatnak egyik oldalán, a képen nyugat felé egy kiágazása van, melynek segitségével két csavar szoritása által a prismának hypothenusa felületét a legnagyobb pontossággal be lehet az optikai tengelybe állitani. A kérdéses gyűrű az objectivgyűrűn forog, s így a prisma hypothenusa felületét pontosan be lehet a meridiánba is állítani, azonban ezzel csakis a durva állítás eszközölhető, mert a finom beállító csavar a tengelyen van alkalmazva, melyben a távcső positioszögben forog, s a



1. ábra.

beállítás után minden csavar meg lesz szorítva s a szilárdság teljesnek bizonyult. A távcső ocularja különben át is fordítható, ha példának okáért északon akarunk megfigyeléseket eszközölni, nemkülönben az egész tengely is átfordítható mint egy kisebb passagecsőnél.

A kör egy kis libellával ellátott index segítségével $^1/_2$ fokokat enged leolvasni, a mi is beállítási czélokra több mint elegendő.

Az olvasó valószínűleg azt fogja mondani, hogy ennyi fáradtsággal egy kis passageműszert is lehetett volna készíteni. Ám lehet, hanem azután ekkora objectivvel megvilágított látmezővel sohasem birnánk 4·5 nagyságú csillagot megfigyelni!

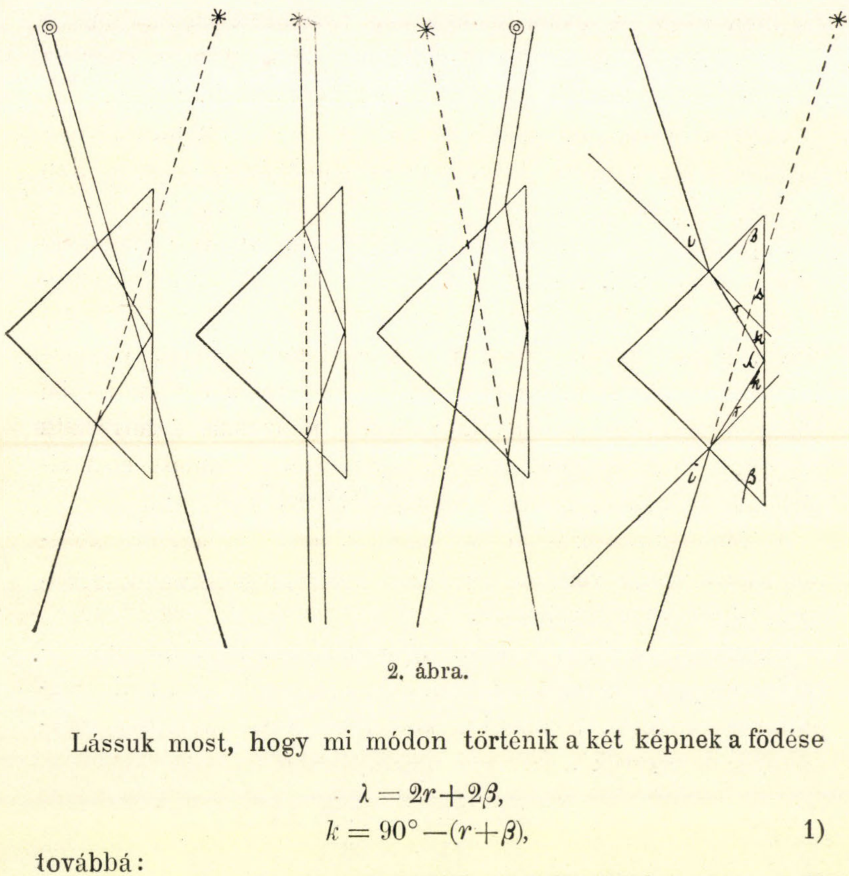
A passageprismán, ha olyan égitestet figyelünk meg, melynek átmérője van, példának okáért a Napot, érintkezéseket és fedést, a csillagoknál csakis fedést észlelünk, s így a Napnál három, a csillagnál egy átmenetnél csak egy megfigyelést jegyezhetünk fel. Ez ennek a műszernek a hátránya, de egy óriási előnye az, hogy nem kell hozzá lámpa, a mely a látmezőt megvilágítja, hogy a fonalak láthatók legyenek, mert jelen esetben ha egy feltétlen megbizható lámpát akarnánk műszerünkhez alkalmazni, az alighanem ép akkora lenne legalább is, mint a műszer maga, s annak kisugározása akkora lenne, hogy alig lehetne a kis objectiven a lámpás közelsége miatt harmadnagyságú csillagokat látni.

Ezen a bajon úgy lehetne a kérdéses műszeren segíteni, hogy a prismát állító kart mérhetően el lehessen mozdítani, s minden egyes csillag érintkezés után *n* értékkel tovább vinni. Ezzel a gondolattal még foglalkozni szándékozom.

A sugarak menete a prismában sokkal inkább ismeretes, minthogy azzal hosszasabban foglalkozni óhajtanék, s itt csak a 2. ábrán azt akarom feltüntetni, hogy a meridián előtt az objectivben direct látható kép és a prismában reflectált kép mindinkább egymáshoz közeledik (2. ábra, 1. kép), és abban a pillanatban, a midőn a csillag a meridiánban van, a két kép egymást fedi (2. kép), míg a két csillag a megtörtént érintés, illetve födés után mint azt a 3. kép tünteti fel, egymástól távolodik; ezek után csakis röviden óhajtom a passageprisma elméletét leirni.

A fénysugármenetet a következőképen értjük meg.

Ha példának okáért valamely más módszerrel a műszert már helyesen beállítottuk a meridiánba, akkor a 2-ik ábra 4-ik képén a fénysugár a meridián előtt i szög alatt fog a prismára esni s a prismában kétszeres törést is fog szenvedni, míg a meridián síkjában fekvő felületről (hypothenusa felület) visszaverődik.



2. ábra.

Lássuk most, hogy mi módon történik a két képnek a födése

$$\lambda = 2r + 2\beta,$$

$$k = 90^\circ - (r + \beta), \qquad 1)$$

továbbá:

$$i - r + s + 2r + 2\beta + 90^\circ - (r + \beta) = 180^\circ, \qquad 2)$$

$$s = 90^\circ - \beta - i, \qquad 3)$$

s ha $s = 0$, akkor

$$i = 90^\circ - \beta, \qquad 4)$$

$$k = 0,$$

a $k = 0$-ból pedig következik, hogy

$$r = 90° - \beta, \tag{5}$$

azaz, hogy

$$i = r. \tag{6}$$

Ha a fénysugár a prisma hypothenusa felületén párhuzamosan halad végig, tehát a meridiánban, akkor bekövetkezik az, hogy $i = r$, s akkor a két kép fedésének momentuma a csillag átmenetét jelenti a meridiánban, hozzáteszem, hogy ha a hypothenusa felület teljesen a meridiánban áll.

Hogyha óránk járását eléggé ismertük s abban meg is bizhattunk, elég pontos idővel rendelkeztünk arra, hogy a Nap delelésével műszerünket durván a meridiánba állítsuk.

A pontos felállítást azonban dr. Terkán Lajos csillagokkal eszközölte. Ő t. i. három csillagot észlelt a kör keleti helyzetében s egyet (40—50° declinatióban) a kör nyugati helyzetében, azután ismét kettőt a kör keleti helyzetében. Ily módon úgy az azimuthhiba mint a prisma okozta collimátióhiba könnyen számításba vehetők voltak, a melyekkel a correctiók nagyságát is ki lehetett fejezni. Ilyenformán már az első kisérletnél az összes hibákat zérusra lehetett reducálni.

Az időmeghatározásnál egy észlelés, azaz csillagfödés közepes hibája $\pm 0^s.5$ volt, hat fedésnek a középhibája pedig $\pm 0^s.2$, egész $\pm 0^s.1$ között változott.

Ugyancsak a juliusi periodus alkalmával naponta röppentyűket eregettünk fel Tagyoson, még pedig mindig az időmeghatározás közben, a miből a következő hosszkülönbség meghatározást nyertük a hétnapi megfigyelésből:

Julius 23 $= - 33^s.2$,
« 24 $= - 33^s.5$,
« 25 $= - 33^s.5$,
« 26 $= - 33^s.0$,
« 27 $= - 32^s.6$,
« 28 $= - 33^s.2$,
« 29 $= - 32^s.6$.

Ezen megfigyelésekből kitűnik, hogy a hosszkülönbség Ó-Gyalla és Nagy-Tagyos között $-33^{s}.09$, azaz mondjuk $-33^{s}.1$. Egy rakétajelzés középhibája $\pm 0^{s}.5$; az összes megfigyelések-

3. ábra.

ből levezetett középhiba $\pm 0^{s}.1$, dr. TERKÁN LAJOS számítása szerint.

Megjegyzem még, hogy a hullócsillag megfigyelésekből 75 azonos hullócsillag volt megállapítható; magasságszámításra ezekből biztosan 40 használható, a többiek pedig érdemesek arra, hogy belőlök csoportokat képezve valószínűleg kitünő eredménynyel radiansokat számítsunk.

4. ábra.

Az augusztusi periodusban ugyanezt a megfigyelési módot folytattuk, azonban az augusztusi adatok nem lévén kezemben, azokat ezúttal nem közölhetem, de különben sem akarom ezt a tárgyat kimeriteni, mert dr. Terkán az egész megfigyelési anyagot egy igen érdekes értekezésbe fogja összevonni, s a juliusban és augusztusban Ó-Gyallán és Tagyoson összesen vagy nyolcz és félszáz hullócsillagból a radiansokat és a két állomáson egyidejűleg megfigyelt meteoritek magasságát fogja ismertetni, a midőn az időmeghatározásokat is teljességében ki fogja fejteni.

A 3. ábra azt a pillanatot tünteti fel, a midőn dr. Terkán a műszer tengelyét nivellálja, míg egy másik megfigyelő egy Pistor-féle prismakörön a Nap magasságát méri; a 4. ábra pedig azt a jelenetet tünteti fel, a midőn ugyancsak dr. Terkán a Nap átmenetét észleli a meridiánban.

A felvételeket ifj. Konkoly Thege Miklósnak köszönhetjük. Meg kell még emlékeznünk arról, hogy a műszert a lomtárból előszedett darabokból Klassohn János intézeti műszerész és a mechanikai osztály vezetője a legodaadóbb buzgalommal s nagy értelemmel és ügyességgel állította össze.

Dr. Konkoly Thege Miklós.

AZ 1905 AUGUSZTUS 30.-I NAPFOGYATKOZAS MEGFIGYELÉSE CARRIÓN DE LOS CONDES-BAN.

Előadatott a *Mathematikai és Physikai Társulat* 1907. február 7.-én tartott rendes ülésén.

Az 1905 augusztus 30.-i teljes napfogyatkozás minden tekintetben rendkívül kedvező körülményeknek örvendett. Ugyanis először aránylag hosszú tartamú volt; másodszor a totalitas útjának nagy része szárazföldön haladt át és pedig könnyen hozzáférhető vidékeken és a mellett olyanokon, melyek különösen szép időt igértek. A napfogyatkozás napkeltével kezdődött Labradorban (É.-Amerika) és a teljes árnyék középvonala onnét áthaladt az atlanti oczeánon, Spanyolországon, a Balear szigeteken, Algiron, Tuniszon, Tripoliszon és Egiptomon keresztül egészen Arábiáig, hol napnyugtakor végződött. Minden tehát jó eredménynyel kecsegtetett, miért is csaknem minden országból több expeditio indult a kedvező alkalom kiaknázására. Ebben a nagy versenyben a Jézus-társaság sem hiányozhatott. Rendünk részéről csupán Spanyolországban 14 különböző helyen többé-kevésbbé teljes programmal és felszereléssel történt megfigyelés.

Az expeditio, melyben én részt vettem, a Jézus-társaság granadai csillagdájából indult ki, melynek fiatal igazgatója, P. Mier y Terán, a kalocsai Haynald-observatorium igazgatóját, P. Fényit segédűl meghívta. Engem, a kit úgy is P. Fényi assistensévé szemeltek ki elöljáróim, a tartományfőnök küldött Spanyolországba, hogy a megfigyelésekben részt vegyek és így ismereteimet bővítsem.

A teljes napfogyatkozás megfigyelésének főczélja a napkorona megvizsgálása volt, mind alakjára, mind alkotó részeire nézve. A korona alakja nagyon változó; átlagos magassága 300.000 km-re tehető. Az eddigi megfigyelésekből kitetszik, hogy e változás szoros összefüggésben áll a napfoltok számával, úgy hogy a korona is akkor van legjobban kifejlődve, mikor a foltok száma maximumát éri el. Következőleg ebben is nyilvánul a nap tevékenységének 11 évi szakasza. Eleddig még nem sikerült a koronát a teljes napfogyatkozáson kívül látni. Tehát 100 év alatt csak néhány napon látható és esetenkint egy helyen csak ritkán 5 vagy 6 perczig. Ez az oka annak, hogy ismereteinket eme rejtélyes tünemény fölött csak lassan tudjuk bővíteni. Különben is e tünemény pontos megfigyelése igen nehéz. Már csekély ingadozás is a légkör átlátszóságában, az észlelő szem érzékenysége, a figyelem összpontosítása egy különösen feltünő jelenségre, mind oly körülmények, melyek az eredményt nagyon is érzékenyen befolyásolják. Így például 1870-ben két tengerész tiszt egy és ugyanazon a hajón rajzolta le a koronát; az egyik rajz hat sugarú csillagidomot mutat, a másik pedig két egymást keresztező ellipsist. A tiszta «*visualis*» megfigyeléseken alapuló leírásokból tehát csak nagyon óvatosan szabad következtetéseket vonni.

Megbízhatóbbak a fotografiai úton nyert képek. Azonban a fénykép se mutat mindent a mi szabad szemmel, vagy távcsővel látható és viszont. A korona fényének egy része ugyanis nagy chemiai hatással bir, a szemre pedig nem igen hat és viszont. Továbbá a korona fénye a naptól való távolsággal nagyon észrevehetően csökken. Ha tehát az expositio igen hosszú, akkor elvesznek a korona világosabb részei; ha ellenben az expositio rövid, a gyöngébb részek nem érvényesülnek a lemezen. Ezékből következik tehát, hogy hiába igyekszünk a koronáról oly fényképet nyerni, mely a korona minden részletét tisztán mutatja; de egyszersmind az is kitetszik, hogy a «visualis» megfigyelés nem egészen mellőzhető. Hanem kell, hogy mindkét megfigyelési módot kellően összekapcsoljuk.

Már most kérdezhetjük: Mi tulajdonképen a korona? A kérdés rövid, a felelet azonban reá nem oly könnyű. KEPLER és utána a csillagászok egészen a mult század elejéig azt gondolták, hogy a hold légköre okozza a fölötte szép látványt. Csak azután győződtek meg mind jobban arról, hogy a holdnak nincsen légköre, vagy ha van, akkor az oly ritka, hogy nem elegendő a korona magyarázatára. Ezen időtől fogva tehát, egészen 1869-ig az volt az általános nézet, hogy a korona okát a föld légkörében kell keresni. Volt azonban már ezen idő alatt is néhány csillagász, a kik a koronát a naphoz tartozónak tartották. A kérdés 1869-ben eldőlt, mikor YOUNG és HARKNESS a teljes napfogyatkozás alkalmával — egészen függetlenül egymástól — a korona színképének zöld részében *világos* vonalat födöztek fel. A korona tehát izzó gázt tartalmaz, a mi csakis a nap közelében lehetséges. Az anyagot, mely ezt a világos csíkot előidézi, külön elemnek tartják és egyelőre koroniumnak nevezték el. Más égi test vagy földi anyag színképében eddig még nem sikerült ezt a vonalat feltalálni. Ezen koronium-csikon kívül a korona színképében még a hidrogén-vonalak is fellépnek.

A nézetek azonban a korona mivoltáról még manapság is eltérők. Általában még is megegyeznek abban, hogy nem lehet a nap légköre. Ugyanis fénye igen egyenletes, azaz alulról felfelé nincs észrevehető sűrűségkülönbség. Továbbá bizonyosnak látszik, hogy létrehozásában mágneses és elektromos erők is közreműködnek. Ama körülmény, hogy a korona fényének egy része polározott, arra utal, hogy a korona szilárd testecskéket (kozmikus port) tartalmaz, melyek a napfényét visszatükrözik. Következőleg tehát a korona fénye legalább részben csak visszaverődött napfény volna és eme következtetésre az a tény is jogosít, hogy a korona színképében még a vas legsötétebb absorptiós vonalai is láthatók. A korona képe általában a következő. A hold korongját közvetetlenül keskeny fénykoszorú veszi körül, mely sokszor oly vakító világossággal bir, hogy a totalitásnak kezdetének és végének pontos megfigyelését nagyon megnehezíti. Ez az úgynevezett belső korona. Erre következik körülbelül 25 egész 30-szor oly széles ezüstös gyöngyfényű öv, melynek világossága kifelé nagyon gyorsan csökken és szinte észrevétlenül megszünik. Ez a külső korona. Ebből sugarak törnek ki sokszor tetemes távolságra, mely sugarak azonban nem mindig radialisan állnak a naphoz, hanem sokszor ferdén és tangentialisan. Némely csillagászok véleménye szerint üstökösök és meteoritok volnának. E sugarak még a leghosszabb expositio mellett sem igen érvenyesülnek a fotografáló lemezen.

Ezek előrebocsájtása után áttérhetünk tulajdonképeni megfigyelésünk ismertetésére.

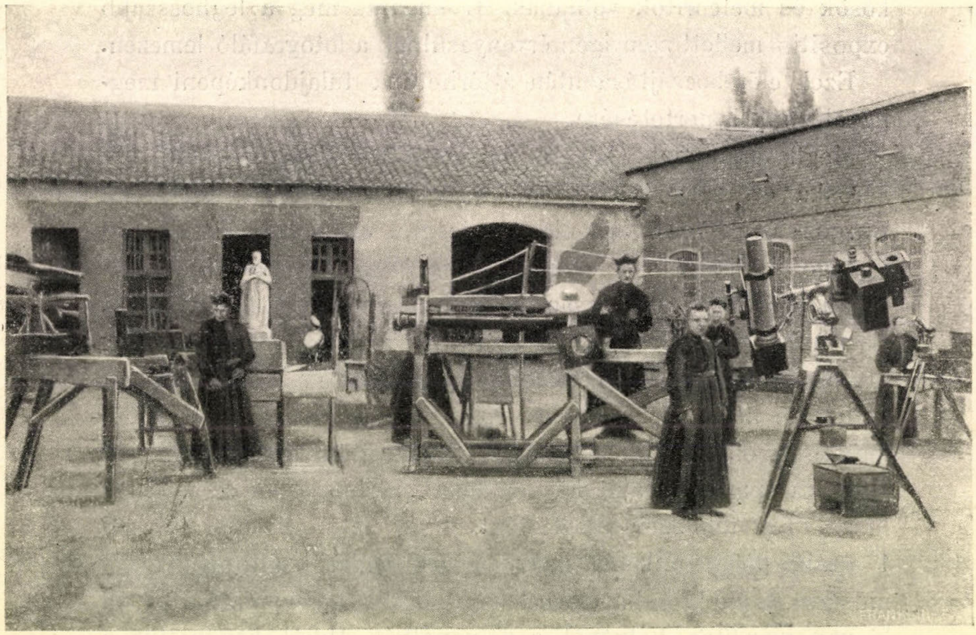
Megfigyelésünket Carrión de los Condesban végeztük. Kis városka ez, vagy inkább falu a castiliai fensíkon, körülbelül Burgos- és Leóntól egyenlő távolságra. Geografiai északi szélessége 42°19′41″ és nyugati hosszúsága Greenwichtől számítva $0^h18^m30^s\!.5$, magassága a tenger színe fölött 901 méter. Carriónba tehát Granadából szállítottuk műszereinket. A műszerek felállítása, a sötét kamara berendezése s a többi munka, jó három hetet vett igénybe. Nem akarok szólni a sok kellemetlenségről, melyet a spanyol kiváncsiság nekünk okozott. Mert «a spanyol» saját közmondása szerint «csak az ujjainak hisz». Így többször megtörtént, hogy míg mi éjjel 12, sőt 1 óráig dolgoztunk és nagy ügygyel-bajjal beállítottunk egy műszert a meridiánba, reggel azt találtuk, hogy néhány fokkal ki van mozdítva helyéből, a délvonalból. Újból kezdhettük a munkát.

Műszereinket egy udvarban állítottuk fel. (Lásd 1. képet.) Csak a legfontosabbakat akarom említeni.

Az első az úgynevezett *universale*[1] vagy *theodolit.* (2. kép.) Mire szolgált? Minden csillagászati megfigyelésnél igen nagy jelentőségű a pontos idő és az észlelési hely geografiai coordinátáinak ismerete. Ezeket tehát meg kellett határozni és így időmeghatározást végezni. Ugyanis, bár a négy kontaktus

[1] Készült SALMOIRAGHInál Milánóban.

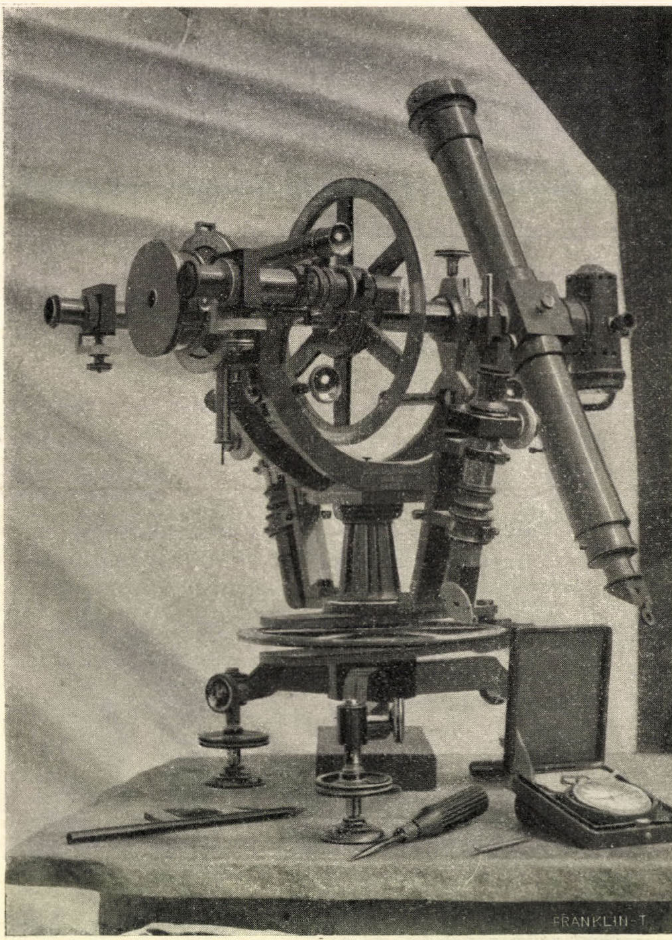
idejét előre kiszámították, még is érdekes volt megfigyelni, vajjon csakugyan összevág-e a számítás a megfigyeléssel. Mert ha a kettő egymástól elütő eredményt mutat és ha az eltérés különböző helyen közel egyforma nagy, akkor ezekből esetleg új adatokat lehetett volna nyerni a hold állandói javítására. Ezekből már kitűnik, mily fontos a jól ismert idő és hogy



1. ábra.

mily fontos szerepet játszott az ennek meghatározására szolgáló theodolit. Azért is ezt a műszert expeditiónk leggyakoroltabb tagjára, P. Fényire, a kalocsai Haynald-observatorium igazgatójára biztuk. A napfogyatkozás alatt P. Fényi a korona színképében a fönt már említett világos vonal helyét akarta meghatározni, vagyis a koronium fényének hullámhosszát óhajtotta megmérni; de — sajnos — a felhők szándékában megakadályozták.

Egy másik igen fontos műszer a *coelostat.*[1] (3. kép.) Ezen műszer előnye, hogy nagy és hosszú gyújtótávolsággal biró fényképező készüléket használhatni, a nélkül, hogy azt paral-

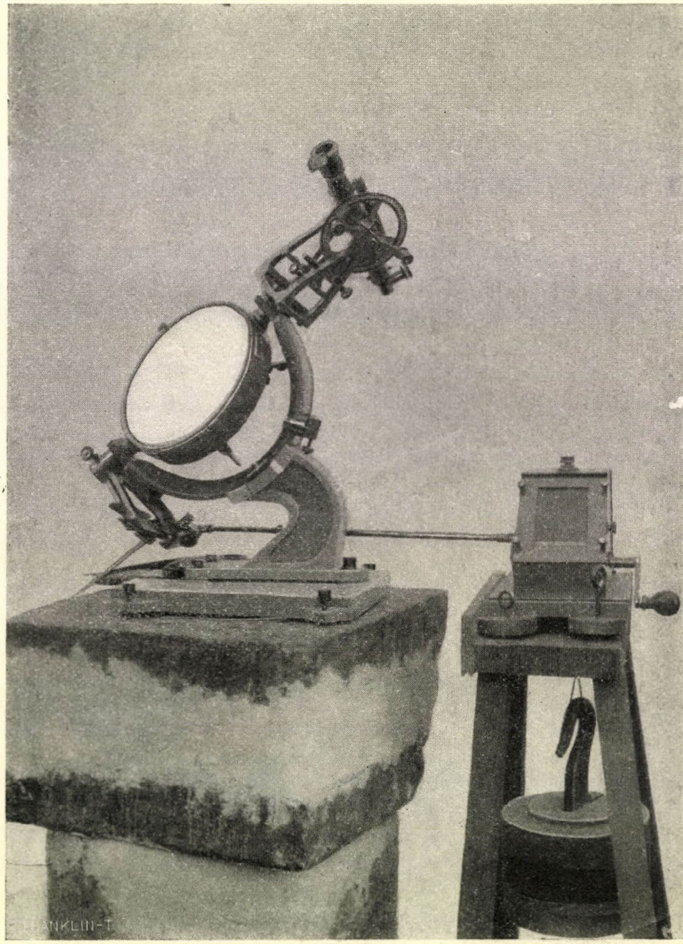


2. ábra.

lactice kellene felállítani. A cœlostat tükre ugyanis vízszintes fénynyalábot szolgáltat. Röviden ismertetem e műszer szer-

[1] Készült STEWARDnál Londonban.

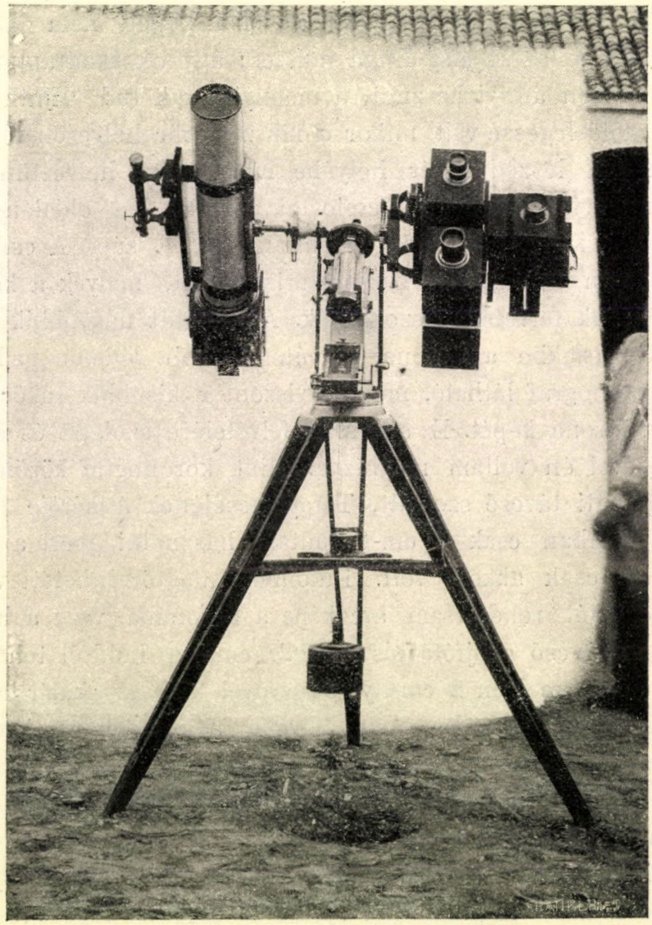
kezetét. Alapja erős vaslap, melyet vízszintesen kell felállítani, úgy hogy a hossztengelye a délvonalba essék. Egy csusztatható félkör sima tükröt hord, mely saját tengelye körül for-



3. ábra.

gatható. Ha a cœlostat helyesen van felállítva, akkor a tükör tengelye párhuzamos a világ tengelyével, vetülete pedig beleesik a délvonalba. Tehát a tengely és vetülete által bezárt szög egyenlő a megfigyelési hely geografiai szélességével. Egy óramű forgatja a tükröt, úgy hogy a megvizsgálandó égi test képe állandóan egy helyre esik. A tükör tengelyének felső végén kis távcső látható, mely finoman osztott deklinatiós körrel van ellátva. Ez csak a műszer felállítására szolgál. Talán már fel is tünt, hogy e távcső az első képen nem látható. Ugyanis a cœlostat elég drága műszer; úgy okoskodtunk tehát, hogy hajtson annyi hasznot, a mennyit csak tud. Minthogy a távcső fölöslegessé vált, mikor a műszer már helyesen fel volt állítva, azt leszedtük és helyébe más tükröt helyeztünk. Ez által azt értük el, hogy a cœlostat jobb és bal oldalán fotografáló készüléket tudtunk felállítani. (L. 1. kép.) A cœlostat bal oldalán látunk két kamara-prismatikát, melyek a korona színképének felvételére szolgáltak. A cœlostat nagyobbik tükre vetítette ezekbe a korona fényét. A jobb oldalon pedig az első koronograf látható, melybe viszont a kisebbik tükör vetítette a korona képét. Ez a korona felvételére szolgált és ennek kezelésével én voltam megbizva. Mint koronograf közönséges csillagászati távcső szolgált. Tárgylencséjének átmérője 16 cm volt; azonban csak 9 cm-t tudtam használni, mert a tükör átmérője csak akkora volt. Különben megtörténhetett volna, hogy egy-két rendtársam arczképe a koronába vagy a holdra kerül. A távcső gyujtótávolsága 2·27 cm; a holdról tehát oly képet adott, melyen 2 cm-nyi átmérővel bir. Az okulár-lencsét természetesen leszedtem és helyébe négyszögletes kamarát helyeztem. Összesen 14 felvételt eszközöltem; 12-t a totalitas alatt, kettőt meg utána. Három különféle fajta lemezt használtam. A totalitas kezdetén és végén olyant, mely a vörös fény iránt érzékeny. Ekkor ugyanis a vörös chromosphéra látható inkább. A pillanatfelvételek az objektiv lencse csekély fényerőssége, de főleg a kedvezőtlen időjárás miatt nem igen sikerültek. A hosszabb expositiós felvételeim azonban megfigyelésünk legjobb eredményét képezik. E távcső jelenleg a cœlostattal együtt a granadai csillagdán van felállítva és spektroheliograful szolgál.

A 4-dik képen látható műszer, bármily furcsának is látszik, semmi egyéb mint kis *aequatoreale.*[1] Mikor ez helyesen fel volt állítva, leszedtük róla a távcsövet és négy fényképezési készüléket helyeztünk reá. A hosszú kamara (bal felé) a má-

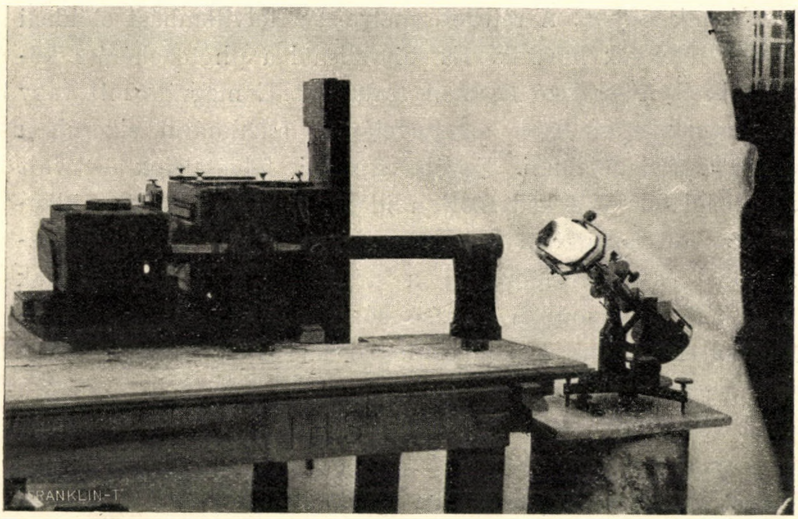


4. ábra.

sodik koronograf, a korona felvételére. Ezzel csakis a pillanatfelvételek sikerültek jól, mert lencséjének fényerőssége igen nagy. A három kamara a tengely jobb végén, az úgynevezett

[1] Készült Londonban STEWARDnál.

camarae campi magni. Optikai nyilásuk igen nagy, látómezejük tehát az égnek nagy részét felölelte. Ismeretes dolog, hogy a csillagászok bizonyos háborgások miatt a nap és a merkur között még egy bolygót sejtenek. De mivel ez igen közel áll a naphoz, nem látható. Teljes napfogyatkozás alkalmával azonban esetleg láthatóvá lehetne. Erre a bolygóra vadásztunk e három kamarával. Azonban siker nélkül. Eddig még nincs



5. ábra.

tudomásom arról, vajjon más expeditio erre nézve nagyobb szerencsével dolgozott-e.

5. *kép.* A spektrograf, a korona színképének felvételére. Egy Silbermann-féle heliostat vetítette a korona fényét a collimatorcsőre. Három félkörben elrendezett flinthasáb körülbelül 20 cm hosszú színképet adott. (λ 589·6-tól λ 393·3-ig körülbelül.)

Az első képen a háttérben látható távcső az æquatorealéhez tartozik. Ezen figyeltük meg projektiós készülékkel a négy kontaktust. A cœlostat készüléket még valamire felhasználtuk. A nagyobb tükör mezejébe egy derékszögű flinthasábot állítottunk, melynek egyik befogójára a nap, illetőleg a korona képe esett; a másik befogója elé pedig egy spektroskopot à vision directe helyeztünk, melylyel az igazgató P. MIER Y TERÁN a nap és a korona színképét vizsgálta és a második és a harmadik kontaktust, vagyis a totalitas kezdetét és végét figyelte meg. Ugyanis a totalitas kezdetén és végén a nap színképében a fekete vonalak néhány pillanatra nagyon világosan felvillannak. Ugyanazt megfigyelte P. FÉNYI is az ő spektroskópjával, hogy e két fontos időpontról minél több megfigyelésünk legyen. A réteget, mely ezt a felvillannást előidézi elnyelő rétegnek nevezik. Ez közvetlenül a photosphérára következik és főleg izzó fémgázt tartalmaz. E megváltozott vagy «*flash*» színképet jelen megfigyelésünk alkalmával sikerült a spektrograffal felvenni. Egyéb színképi felvételeink — volt körülbelül 50 — a kedvezőtlen időjárás miatt nem igen sikerültek. Volt azonkívül még egy kamara prismatika quarczhasábbal és quarczlencsével a színkép ultra-ibolya részének felvételére; ez azonban az első képen nem látható. Parallactice volt felállítva. A meteorologiai műszerek ugyanis külön helyen voltak felállítva.

Ez volt tehát expeditiónk szerény felszerelése. Már egy héttel a nagy esemény előtt esténkint próbára összehívtuk mindazokat, a kik megfigyelésekben résztvenni hivatva voltak. Fontos, hogy mindenki jól tudja a teendőit, nehogy a napfogyatkozás hatása nagyon zavarólag hasson a megfigyelőre és a megfigyelés eredményére. Ugyanis a teljes napfogyatkozás olyannyira érdekes és megható tünemény, hogy az még a leggyakoroltabb csillagászt is kihozhatja a sodrából.

Augusztus 29-dikétől 30-dikára virradó éjjel rendkívül tiszta volt az ég; fel is használtuk. Műszereink felállítását még egyszer gondosan átvizsgáltuk. Azután a fényképészeti lemezeket már jól előre átgondolt terv szerint az illető lemeztartóba helyeztük és szépen elrendeztük. Dolgoztunk egész éjjel. Reggel 4 órakor az ég még szép tiszta volt. Bizton reménykedtünk, hogy programmunkat jó sikerrel végrehajthatjuk. De 5 óra tájban már finom cirrus felhők mutatkoztak; a délelőtt folyamán mindig jobban sűrűsödtek, úgy hogy 11 órakor már az ég $^{3}/_{4}$ része alto-kumulusokkal volt beborítva. A munka azonban szakadatlanul folyt. Az utolsó felülvizsgálásokat végeztük. A partialis fogyatkozás alatt gondosan megfigyeltem a környéket. Azt hiszem, nincs az a színárnyalat, melyben a természet successive nem festett volna, míg végre föld és ég ólomszürke színbe borult. Olyan nehéz valami nyomódott az emberre, hogy szinte szót sem találunk annak leírására. Azt a benyomást nyertem, mintha az ég le akarna szakadni, hogy összezúzza a földet.

De ily reflexiókból csakhamar felriadtam. A közeli tornyon felállított őr sípja megszólalt, mely jele volt annak, hogy a láthatáron már feltünt a hold teljes árnyéka is. Az igazgató jelére teljes csönd lett az udvaron; ki-ki végezte teendőit. Mást nem lehetett hallani, mint az elektromos csengetyűt, mely a másodperczeket ütötte és az egyik rendtársam hangját, ki azzal volt megbizva, hogy a másodperczeket hangosan számolja, úgy hogy mindenki minden perczben tudhatta a totalitasnak hányadik perczében vagyunk már.

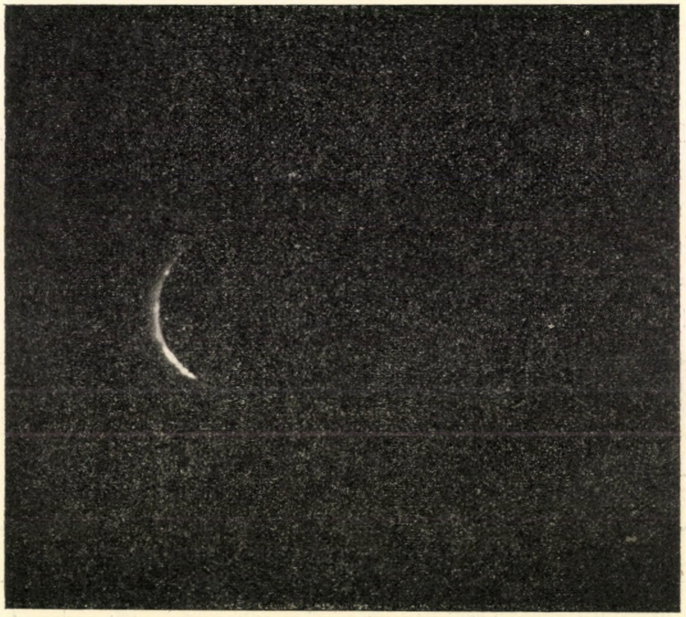
A totalitas P. Fényi mérése szerint 3^m37^s tartott.

A négy kontaktus ideje a következő:

	I.	II.	III.	IV.
A madridi csillagda számitása szerint Greenwichi idő ...	$11^h 45^m 9^s.1$	$13^h 5^m 33^s.1$	$13^h 9^m 9^s.1$	$14^h 26^m 9^s.1$
A megfigyelt idő, Greenwichre átszámitva ...	11 45 24·1	13 5 24·6	13 9 1·6	14 25 47·1
C—O ...	$+15^s.0$	$-8^s.5$	$-7^s.5$	$-22^s.0$
A tortosai observatorium számitása szerint Greenwichi időben ...	11 45 6·0	13 5 30·0	13 9 6·0	14 26 0·0
C—O ...	$+18^s.1$	$-5^s.4$	$-4^s.4$	$-12^s.9$

A megfigyelés után nagy volt a kiváncsiság, milyen eredménynyel végződött a nagy és fárasztó munka. Jöttek-mentek egész délután a vendégek. Mi azonban, hogy zavartalanul dolgozhassunk, csak későn este láttunk az előhiváshoz. Az eredmény sokkal jobb volt, mint mi azt oly kedvezőtlen időjárás mellett vártuk.

A hatodik kép mutatja a koronát a totalitas első perczében. Az expositio öt másodperczig tartott. A nap keleti részén nagy

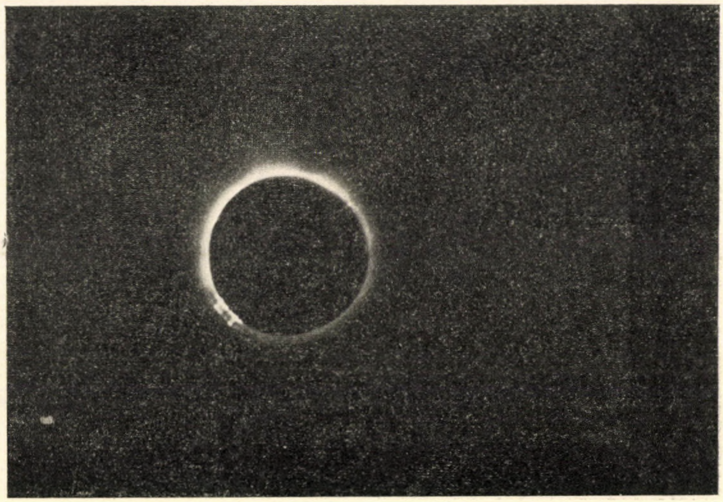


6. ábra.

protuberancia-csoport látható, melyet szabad szemmel is lehetett látni. A protuberancia legnagyobb magassága 40.000 km-re emelkedett. Volt 10 vagy 11 különálló protuberancia, melyek alakjukra nézve nagyon hasonlítottak vulkanikus kitörésekhez. Emelkedésükkel szélességük is nőtt, míg végre az egész csoport egybeolvadni látszott. Lényegesen más alakja volt a jobb oldali (*SE* felé) legszélsőbb protuberanciának. Csaknem egyenlő szélességgel emelkedett 40.000 km-nyi magasságra; ott azonban mintha megtört volna és 50.000 km-nyi hosszúságban húzódott párhuzamosan a nap szélével. Az egész csoport hossza 420.000 km volt.

7. kép. Az expositio tartama 20^s volt, ugyancsak a totalitas első perczében. A korona már jobban látható. Itt azonban mutatkozik egy különös tünemény: a protuberanciák duplák. Mi lehet ennek az oka?

Talán reszketett a tükör? De nem valószínű. Nem volt erősebb szél a légkör alsó rétegeiben; senki nem volt a cœlostat közelében, ki azt meglökhette volna.



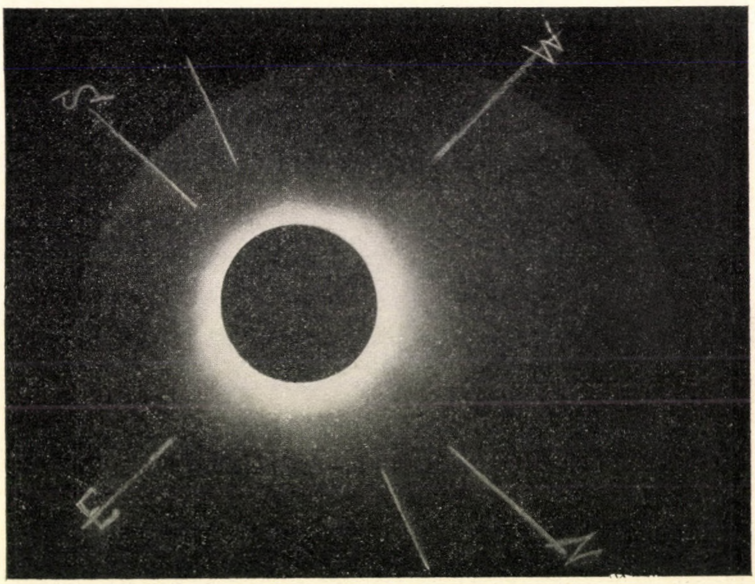
7. ábra.

Vagy talán az óra járt szabálytalanul? Nem hihető. Több napon át gondosan figyeltük az óra járását és azt kifogástalannak találtuk.

Talán meglöktem a műszert? Erre azonban ugyancsak erős lökés kellett volna és biztosan fájt volna tőle a kezem, mire épen nem emlékszem.

Tehát mi lehet az oka? Más okot, más magyarázatot nem találtam eddig, mint a felhőket. Hogy-hogy? Ezek a totalitas elején elég sűrűek voltak és épen az eltolódás irányában vonultak el a hold korongja előtt; de csakhamar ritkultak. Talán ebből magyarázható ez az eltolódás, hogy a fénysugarak a felhők vastagabb rétegeiben másképen törtek meg, mint a vékonyabbakban.

Szerény véleményem szerint erre a magyarázatra jogosít az a körülmény is, hogy ugyanaz a tünemény jelentkezett a második koronograffal, ugyanazon másodperczek alatt felvett



8. ábra.

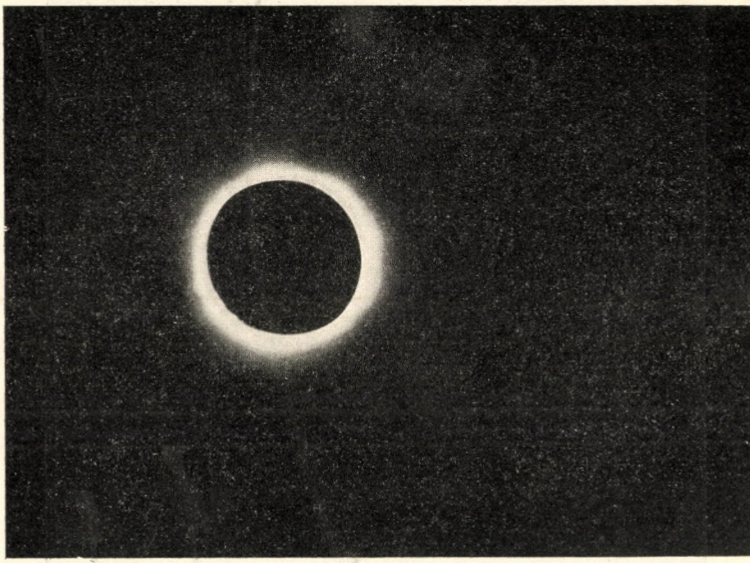
képen is. És mint a mérésekből kitetszik, az eltolódás arányos a két műszer gyújtótávolságával.

8. kép. Legjobb felvételem. Az expositio tartama 30^s, a totalitas második perczében. A korona alakjára nézve jól megfelel a korona typusának, melyet a nap-tevékenység maximuma eredményezhet (1905-ben épen maximuma volt).

9. kép. Az expositio tartama megint 30^s volt; a totalitas részben második, részben harmadik perczében. Az eredeti negativ lemezen a belső korona tisztán látható.

Ezen felvétel után következett még több különböző tartamú expositio. Ezeken a belső korona több protuberanciával a nap nyugati és délnyugati részén érvényesült.

A totalitas után eszközölt két felvételen mutatkozott az úgynevezett *gyöngysor*. A nap sarlóját számos fekete vonal töri át. Ezt a tüneményt a hold hegyei okozzák. Ugyanis a hold hegyei a nap sarlóján csipkézést okoznak, melyet a szem



9. ábra.

és a lencse irradiatio folytán többé-kevésbbé teljes áttöréssé egészít ki.

A második koronograffal is nyertünk több tiszta képet a koronáról. A mellékelt 10-dik kép pillanatfelvétel a totalitas kezdete előtt. A felhős ég, a melyen keresztül a hold korongja már látható, némiképen fogalmat nyujthat arról, mily aggodalomteljes pillanatokat éltünk át 1905 aug. 30-án.

A következő öt kép tudományos értéke nem igen nagy. Ugyanis, hogy a világosság csökkenését a totalitas előtt, illetőleg növekvését a totalitas után és a totalitas alatt uralkodó sötétséget némiképen megbecsüljük, hét felvételt készítettünk egy és ugyanazon tárgyról: hármat a totalitas előtt, hármat utánna — az időre nézve symmetrice elosztva — egyet pedig a totalitas közepén. Az expositio mindig 12 másodperczig tartott; az előhivás és rögzítés pedig egyenlő körülmények közt történt. A mellékelt négy kép mutatja a világosság csök-

10. ábra.

kenését. A 11. képet 15^m a totalitas előtt vettük fel. A mint látjuk, erősen túl van exponálva. Ugyanaz áll a következő, 12. képről, melyet 5 perczczel később, azaz 10^m a totalitas előtt nyertünk. Azonban mégis észrevehetően sötétedett az 5^m alatt. Még feltünőbb a világosság csökkenése a következő felvételen (l. 13. képet), melyet 5^m a totalitas kezdete előtt eszközöltünk.

A 14. képen épen csakhogy a ház körülvonalai még kivehetők; ezt a totalitas alatt vettük fel. Hogy milyen sötétség volt, talán abból itélhetni meg legjobban, hogy az előző este $^{1}/_{4}$7-kor, tehát már napnyugta után felvettem az összes személyzetet az udvaron. Ugyanazt a kamarát egyforma diafragmával és ugyanazt a lemezfajtát használtam. Öt másodperczny expositio mellett, még elég tiszta képet nyertem, míg a totalitas alatt — délben $^{3}/_{4}$1 után — 12 másodpercznyi expositióval csak ilyen képet lehetett kapni. A totalitas után felvett három képen természetesen az ellenkező tünemény mutatkozik, t. i. a világosság növekvése; csakhogy az a kép, melyet öt percz a totalitas után vettünk fel, körülbelül a fönti 12. képnek felel meg. Mivel azonban a felhők a totalitas után sokkal ritkábbak voltak, mint a totalitas előtt, nem volnának jogosultak ama következtetések, melyek felvilágositást nyujtanának a még mindig vitatott kérdést illetőleg: vajjon a világosság csökkenése a totalitas előtt csakugyan lassabban történik-e, mint a növekvése a totalitas után?

Meteorologiai megfigyelések. A napfogyatkozás hatása a légköri változásokban is igen észrevehető volt daczára annak, hogy a felhők egész délelőtt elfödték a napot. A napnak kitett hőmérőn beállott a maximum (20·8° C) kilencz perczczel az első kontaktus után; minimumát (15·7° C) pedig öt perczczel a totalitas után érte el. Tehát sülyedt a hőmérséklet a napon 5·1° C-sal. Tiszta, szép időjárás mellett természetesen még nagyobb lett volna az ellentét. Az árnyékban felállitott hőmérőn szintén emelkedést észleltünk még az első kontaktus után is; a maximum (19·0° C) itt is kilencz perczczel a részletes fogyatkozás kezdete után állt be, akkor sülyedni kezdett; néhány perczczel a totalitas előtt 14·8° C-t mutatott; a totalitas alatt emelkedett, később megint leszállt, míg 3^h5^m-kor, azaz 15^m a totalitas után elérte minimumát (14·7° C-t).

A barometer igen feltünően emelkedett a totalitas beállásakor 690·3 mm-től egészen 691·2 mm-ig. A harmadik kontaktus után ép oly gyorsan leszállt 690·6 mm-ig, hogy újból emelkedjen 691·0 mm-ig, mely állást 13^h0^m-kor érte el. Ekkor megint hirtelen sülyedés következett 690·3 mm-re, a mely

11. ábra.

12. ábra.

13. ábra.

14. ábra.

állásban azután némi ingadozással megmaradt. Hogyan s miképen magyarázandó ez a többszörös hirtelen változás? Választ e kérdésre vajmi nehéz volna adni, oly abnormális időjárás mellett.

A felhők, melyek az ég $^3/_4$ részét beborították főleg *Ci—Cu* és *Str—Cu*-ok voltak; a hold korongja előtt pedig *Al—Cu*-ok vonultak el.

Az áramlatok a légkör magasabb rétegeiben általában megegyeztek azokkal, melyeket a tornyon felállított szélkakas mutatott. A főbb irányváltozások a következők voltak:

12^h 15^m	*WNW*	12^h 35^m	*NW*
12^h 20^m	*WNW*	12^h 40^m	*NNW*
12^h 25^m	*W*	12^h 45^m	*N*
12^h 30^m	*W*	12^h 50^m	*NNW*.

Mindent röviden összefoglalva mondhatjuk, hogy az eredmény a kedvezőtlen időjáráshoz képest jó volt; jobb, mint azt reményeltük. A szakértők pedig egyszersmind azt is kiolvashatják belőle, hogy az expeditio *magyar* tagjának, P. FÉNYI-nek[1] közreműködése épen nem kicsinylendő és hazájának méltán dicsőségére szolgálhat.[2]

P. Angehrn Tivadar S. J.

---

[1] P. FÉNYI GYULA S. J., a kalocsai Haynald-observatorium igazgatója Magyarországnak egyedüli képviselője volt ezen teljes napfogyatkozás megfigyelésében.

[2] Minthogy a lemezek kimérésére külön rendelt mérőeszköz (mely HILGERnél Londonban készült) csak 1906 deczember havának közepén készült el, a mérések még nincsenek befejezve: ezekről tehát még most számot nem adhatok.

Kimutatás

az 1906. év nov. hó 15-től decz. hó 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1903. évre : Darvai Mór dr. 10 kor., Winkler Lajos dr. 10 kor. Összesen ... 20 kor.

1904. évre : Szerényi Géza 10 kor. Összesen ... 10 kor.

1905. évre : Babiak Nándor 6 kor., Molnár Aladár 6 kor., Molnár Sándor 6 kor. Összesen ... 18 kor.

1906. évre : Ábrahám István 10 kor., Angheben Albin 6 kor., Asbóth Emil 10 kor., Balog Mór 10 kor., Bánki Donát 10 kor., Bein Károly 10 kor., Benda Jenő 10 kor., Benko Imre 6 kor., Beregi Ernő 6 kor., Bielek Miksa 10 kor., Bihary Ferencz 6 kor., Bóbita Endre 6 kor., Bodola László 6 kor., Bodor Domokos 6 kor., Bruck Ferencz 10 kor., Bruckner Károly 6 kor., Bugarszky István 10 kor., Butorka Száva dr. 6 kor., Cholnoky Jenő dr. 2 kor., Csajkás Mihály 6 kor., Czakó Adolf 10 kor., K. Danch Ferencz 6 kor., Edelmann Sebő dr. 6 kor., Elekes Pál 6 kor., Emszt Kálmán dr. 10 kor., Erdődy Imre 10 kor., Fabinyi Rezső dr. 6 kor., Ferenczy József 6 kor., Groo Vilmos 6 kor., Habán Mihály dr. 6 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Hausbrunner Vilmos 10 kor., Hatvani Ede 6 kor., Hlatky Miklós 6 kor., Homor Ernő 6 kor., Homor István 6 kor., Horváth József dr. 6 kor., Hubatsek Alajos 10 kor., Janell József 6 kor., Kados Aladár 10 kor., Kerekes Dezső 6 kor., Kisgyörgy János 6 kor., Klimkó Mihály 6 kor., Klug Nándor dr. 10 kor., Korbuly Emil 6 kor., Kosztolányi Árpád 6 kor., Kötse István 6 kor., Lutter János 10 kor., Marcsiss János 6 kor., Mátray Rudolf 6 kor., Mayer Irén 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Muraközy Károly 10 kor., Nagy Dezső 10 kor., Oberle Károly 10 kor., Osztrogonácz János 6 kor., Pap Lajos 6 kor., Pecz Samu 10 kor., Perényi Candid 6 kor., Perjessy László 6 kor., Pfeifer Péter dr. 6 kor., Pilcz Ottó 10 kor., Pizetti Rokus 6 kor., Plischka Norbert 6 kor., Raffmann Jákó dr. 10 kor., Ratkovszky Pál 6 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Rucsinszky Lajos 10 kor., Schimanek Emil 10 kor., Schuller Alajos 10 kor., Skopal István 10 kor., Steécz Gyögy dr. 6 kor., Strasser Nándor 6 kor., Straub Sándor 10 kor., Stausz Ármin 10 kor., Székely Károly 6 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szijártó Miklós 10 kor., Szily Kálmán 10 kor., Szokol Pál dr. 6 kor., Szombathy Kálmán 6 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Tass Antal 6 kor., Thanhoffer Lajos dr. 10 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Vater József 10 kor., Waldapfel János dr. 10 kor., Wartha Vincze dr. 10 kor., Zemplén Győző dr. 10 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen … … … … … … … 600 kor.

1907. évre: Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Leber Gyula ifj. 6 kor., Osztrovszky Sándor 5 kor., Pallos Béla Kajetán 6 kor., Pap János 10 kor., Összesen … … … … … … … … … … … … … 37 kor.

1909. évre: Sinkó József 6 kor. Összesen … … … … … 6 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1906. évre: Budapesti V. k. áll. főgymn. 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főgymn. 10 kor., Budapesti VIII. k. áll. főgymn. 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Érsekujvári közs. kath. főgymn. 10 kor., Mármarosszigeti ev. ref. főgymn. 10 kor., Miskolczi ev. ref. főgymn. 10 kor.

1907. évre: Budapesti áll. polg. iskolai tanitóképző 10 kor., Összesen … … … … … … … … … … … … … … … … … … 80 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból … … … … …	48 kor.	január 1-től	577 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	643 kor.	« «	2381 kor.
Előfizetési dijakból … … … …	80 kor.	« «	850 kor.

Kelt Budapesten, 1907 január 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

Vetitőkészülék «Calderoni II»

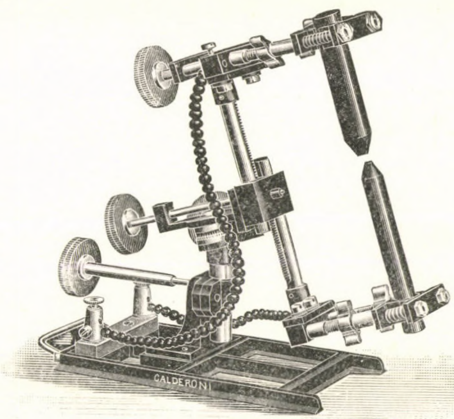
Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, azonban a lámpatartó szekrény acéllemezek helyett feketére égetett 3 mm. vastag sárgaréz-lemezekből van készitve és magnálium hütőbordákkal van ellátva. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 340, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tüneménytek, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—



Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480cm.négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**—	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

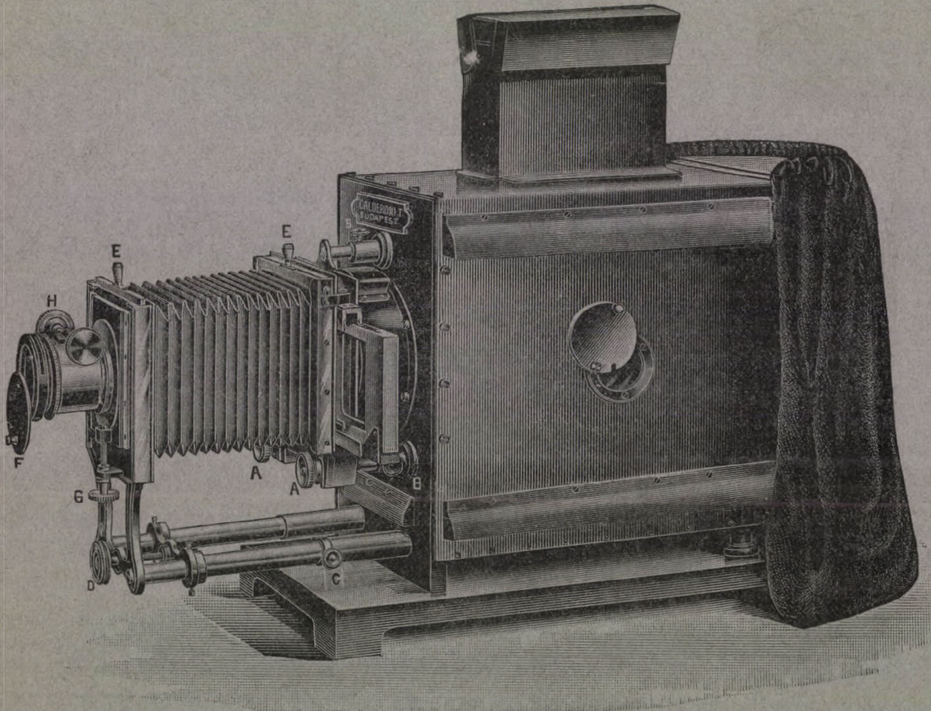
Részletes árjegyzék a jövő tanévben fog megjelenni.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kis hid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék legjobb minőségü aczéllemezekből van készitve, asbestbéléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 11 cm. átm. kettős világitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van felfüggesztve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. A készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.—**

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHATODIK ÉVFOLYAM

III—IV. FÜZET 1907 MÁRCZIUS—ÁPRILIS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1907.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhatodik társulati év 1907 január 1-jén kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czimére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czimére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk

---

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

A SZABÁLYOS SOKSZÖGEK ELMÉLETÉHEZ.

Az «Adalék a szabályos sokszögek elméletéhez» czímű értekezésében [1] RADOS GUSZTÁV az ott bebizonyított egyik általános tételsorozatból mint érdekesebb eseteket kiemeli a 8- és 12-szögekre vonatkozó tételeket. Mivel ekkor bizonyos egyenes vonalakkal határolt területek egyenlőségéről van szó, önként kinálkozik, hogy a területek végszerű egyenlőségének kérdését vessük fel ez esetekben. Nem lesz talán érdektelen, ha megmutatjuk, hogy e szempont alkalmazásával nemcsak azt lehet elérni, hogy e két speciális tétel mint egyszerű szemléleti tétel jelenjék meg, *hanem analog területegyenlőséget lehet megállapitani bármely páros oldalszám esetére is.* Ily módon tehát a szóban forgó speciális tételek mint egy újabb tételsorozat elemei jelennek meg, a mi geometriai jelentőségüket mindenesetre új oldalról világitja meg.

Az idézendő tételt itt mindjárt csak 8- és 12-szögekre fogalmazzuk meg.

Tudvalevőleg, ha a csillagsokszögeket is megengedjük, a különböző szabályos sokszögek száma, melyek adott körbe irhatók: $\frac{\varphi(n)}{2}$, vagyis fél akkora, mint az n-nél kisebb és n-hez relativ prim számok száma.[2] $n = 8$ és 12 esetére tehát két-két különböző sokszöget kapunk, egy-egy közönséges és egy-egy csillagsokszöget. Ha e csillagsokszögek területe helyett, melyet JACOBI szabálya értelmében kellene megállapitani, egyszerűen a *magjuk* területét vesz-

[1] Math. és Term.-tud. Értesítő, XXII. köt. 66. l.

[2] Bebizonyitását l. pl. ZEMPLÉN: Tétel a szabályos csillagsokszögekről. Math. és Phys. Lapok. IX. köt. 54—57. l.

szük,[1] akkor az idézett helyen bebizonyitott általános tétel e két esetre a következő tételeket adja: «*A két beírt 8-szög (illetve 12-szög) területének összege pontosan a körülírt szabályos 8-szög (illetve 12-szög) területét adja.*»

Vagy képletben, ha a körülírt sokszög területét T_n-nel, a beírt sokszögét t_n-nel s a csillagsokszög magváét τ_n-nel jelöljük:

$$T_n = t_n + \tau_n. \quad (n=8,\ 12)$$

Mivel azonban itt a területek egymást fedik, czélszerű lesz a t_n-et a másik oldalra átvinni:

$$T_n - t_n = \tau_n \quad (n=8,\ 12)$$

és a tételt így fejezni ki: a beírt és körülírt szabályos sokszögek területének külömbsége 8-szög és 12-szög esetén épen az illető beírt csillagsokszög magvának területét adja.

E külömbség, ha a körülírt sokszöget úgy rajzoljuk, hogy a beírt sokszög csúcsaiban a körhöz érintőket vonunk, n-háromszög lánczolatából áll (l. az 1. ábrában ferdén sraffozva). Ennek a láncznak kell egyenlőnek lenni a τ sokszöggel.

Tudjuk azonban, hogy ha két, egyenes vonalakkal határolt idom területe egyenlő, az csak úgy lehetséges, hogy azok végszerűen egyenlők,[2] vagyis véges számú, kölcsönösen egybevágó részre bonthatók, s a jelen esetben szabályos alakú és egyező szögeket mutató idomokról lévén szó, egyszerű felbontást várhatunk, a mivel egyszerű bebizonyitását nyerhetjük a szóban forgó területek egyenlőségének.

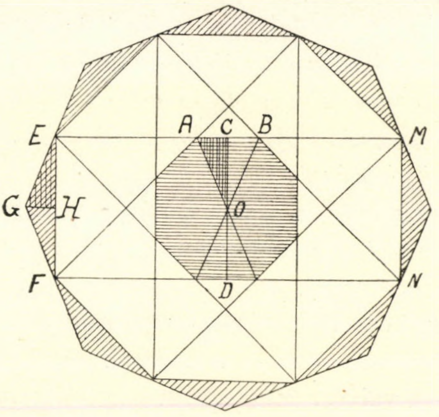
És valóban, nem kell egyebet tennünk, mint a τ_n sokszögekben a középponton át átlókat húzni, s az így előálló háromszögekben magasságokat, hogy 16, illetve 24 oly egybevágó háromszöget

---

[1] E magvak közönséges szabályos sokszögek, lásd az 1. ábrában vízszintesen sraffozva.

[2] Bólyai Farkas tétele; v. ö. Réthy: Végszerűen egyenlő területek. Math. és Phys. Lapok. II. köt. 3. lap.

nyerjünk, mint a milyenekre a lánczot alkotó egyenlőszárú háromszögek bomlanak szintén a magasságuk meghúzása által. Pl. lásd az 1. ábrában egyrészt AOC, másrészt EGH háromszögeket. E két háromszög egybevágóságának kriteriumait, melyek rögtön evidensek, nem is részletezzük, hanem mindjárt az általános esetre térünk át.



1. ábra.

Látható ugyanis, hogy a dolog lényege abban rejlik, hogy a τ sokszögbe beírható kör sugara épen akkora, mint a t sokszög oldalának a fele, vagyis az 1. ábrában pl.

$$CD = EF,$$

ez pedig tisztán az által van meghatározva, hogy a csillagsokszög szemben fekvő oldalai, melyek nem egyebek, mint a beírt sokszög bizonyos, egyenlő hosszúságú átlói, ennek két-két szemben fekvő oldalára merőlegesek.

De látnivaló, hogy *minden páros oldalszámmal biró szabályos sokszögben szintén vannak ilyen merőleges átlók,*[1] s ennek

[1] Azok t. i., a melyek a leghosszabbak után következnek. Páros oldalszámmal biró sokszögeknél u. i. a leghosszabb átlók mind a középponton mennek keresztül; vagyis nem egyebek, mint a körülírt kör átmérői. Ez átmérők felett és alatt egy-egy velük szomszédos átló és egy-egy oldal mindig derékszögeket alkot.

alapján igen közelfekvő a τ sokszögeknek oly általános definitiója, a mely mellett a

$$\tau_n = T_n - t_n$$

összefüggés ($n = 2k$; $k = 2, 3, 4, \ldots$ esetére) fennmarad és tételeinket speczialis esetként magában foglalja.

Be fogjuk tehát bizonyithatni a következő tételt:

I. Bármely páros oldalszám mellett a körbe és kör köré írható szabályos sokszögek területének külömbsége annak a csillagidomnak a magvával egyenlő, a melyet kapunk, ha a körbeírt sokszögben az összes oly átlókat meghúzzuk, a melyek kétkét szemben fekvő oldalra merőlegesek.

Az így definiált mag az, a mit ezután τ_n-nel akarunk jelölni és világos, hogy ez közvetetlen általánosítása az eredetileg máskép jellemzett τ_8 és τ_{12}-nek. A külömbség, melyet mindjárt ki akarunk emelni, csak az, hogy itt *csillagidomról* kell beszélnünk, és nem mondhatunk *csillagsokszöget*, mert ezek az átlók nem minden esetben alkotnak valódi, azaz egyetlenegy törtvonallal rajzolható polygont. Már pl. $n = 6$ esétében sem, a mikor is két egybefont szabályos háromszög alkotja a csillagidomot. Látni fogjuk azonban, hogy azok az esetek, a midőn valódi polygont kapunk, szépen ki fognak válni, úgy hogy ezekre külön is megfogalmazhatjuk majd a tételt, mint az eredeti tételekhez közelebb fekvő általánosítást.

A tétel bebizonyítása igen egyszerű. Legyen EF (2. ábra; a jelölések ugyanazok, mint az 1. ábrában) a beírt sokszög oldala, GE és GF a körülírt sokszög fél-oldalai, O a középpont. Húzzuk meg az EM és FN merőleges átlókat, melyek a szemben fekvő MN oldalhoz vezetnek és vegyük fel EM-en a τ_n magnak egyik oldalát, AB-t. (Ha pontos felvételt akarunk, nem kell egyébre ügyelni mint, hogy $EGF\sphericalangle = \frac{n-2}{n} 180^\circ$, $EOF\sphericalangle = \frac{360^\circ}{n}$, $OAB\sphericalangle$ és $OBA\sphericalangle$ pedig félakkorák, mint $EGF\sphericalangle$).

Mivel a $(T_n - t_n)$ e felvételnél n oly háromszögből áll, mint $EFG\triangle$, a τ_n pedig n olyanból, mint $AOB\triangle$, csak azt kell bebizonyítanunk, hogy

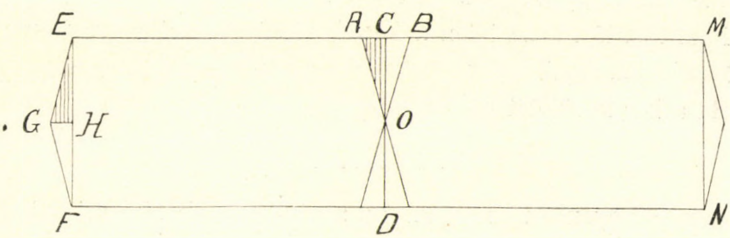
$$EFG\triangle \cong AOB\triangle.$$

E czélból pedig nem kell egyebet tenni, mint ezen egyenlőszárú háromszögekben meghúzni a GH, illetőleg OC magasságokat. Akkor ezek két-két egybevágó derékszögű háromszögre bomlanak. Elég tehát kimutatni, hogy

$$EGH\,\triangle \cong OAC\,\triangle.$$

Erre nézve először is látjuk, hogy

$$EH = OC,$$



2. ábra.

mert $CEFD$ derékszögű parallelogrammában

$$EF = CD \text{ és } EH = \tfrac{1}{2} EF, \quad OC = \tfrac{1}{2} CD.$$

Másrészt

$$EGH\sphericalangle = OAC\sphericalangle,$$

mert GH a T_n-nek, AC pedig a τ_n sokszögnek egy szögfelezője és így a felírt szögek mindegyike egy szabályos n-szög szögének a fele.

Ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Arra az érdekes eredményre jutottunk tehát, hogy két általános tételsorozat két speciális esetben is találkozik és csak ezek után válik külön. Nézzük most közelebbről, hogy mi is az, a mi az $n=8$ és $n=12$ eseteket tételünkben úgy kitünteti, hogy azok a másik tételsorozatban is helyet foglalnak, a többiek pedig nem?

Egy lényeges külömbséget már kiemeltünk: az összes szomszédos esetekben: $n=6$, 10, 14, nem is kapunk a mi definitiónkkal *valódi* csillagsokszöget. De $n=16$ esetében már igen, mert a merőleges átlók itt 7 oldalt fognak át és

$$(7, 16) \sim 1.$$

Mi lesz tehát a külömbség ez esetben? Egyszerűen az, hogy $n=16$ esetén nem csupán *egy* körbe írt szabályos csillagsokszög van, mint $n=8$ és 12 esetében, hanem három különböző, mert

$$\frac{\varphi(16)}{2}-1=3.$$

A Rados-féle tételben ezek mind szerepelnek, a mi tételünkben közülök csak az egyik, a melyet legegyszerűbben úgy jellemezhetünk, hogy magja a legkisebb.[1]

Nem lesz tán érdektelen a kétféle tételt ez esetben részletesen is összehasonlítani.

Ha a kör kerületét a

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, 15$$

pontok 16 egyenlő részre osztják, a négy különböző beírt sokszöget úgy kapjuk, ha rendre a

$$01,\quad 03,\quad 05,\quad 07$$

húrokat veszszük egyik oldal gyanánt. Ennek megfelelően az idézett értekezésben (70. lap), területeiket, illetve a magjuk területét, rendre

$$I_{16}^{(1)},\ I_{16}^{(3)},\ I_{16}^{(5)},\ I_{16}^{(7)}$$

jelöli s a tétel:

$$\frac{\Sigma I_n^{(j)}}{C_n}=\frac{\varphi(n)+\varepsilon_n}{4}$$

azt mondja, hogy

$$\frac{I_{16}^{(1)}+I_{16}^{(3)}+I_{16}^{(5)}+I_{16}^{(7)}}{C_{16}}=\frac{8+0}{4}=2. \qquad 1)$$

A mi tételünk pedig:

$$\tau_{16}=T_{16}-t_{16},$$

ha hasonló alakra és ugyanazokra a jelölésekre térünk át,

---

[1] Oldalai u. i. az átmérők után, a melyek nem jönnek tekintetbe, a lehető leghosszabb húrok és így távolságuk a középponttól a lehető legkisebb.

$$\tau_{16} = I_{16}^{(7)}$$
$$t_{16} = I_{16}^{(1)}$$
$$T_{16} = C_{16}$$

lévén, így fejezhető ki

$$\frac{I_{16}^{(1)} + I_{16}^{(7)}}{C_{16}} = 1, \tag{2}$$

De így önként kinálkozik a két tétel összekapcsolása egy új tétellé. Az 1)-ből a 2)-t levonva, kapjuk, hogy

$$\frac{I_{16}^{(3)} + I_{16}^{(5)}}{C_{16}} = 1 \tag{3}$$

a mi érdekesen egészíti ki az 1)- és 2)-ben kifejezett tételeket. Azt látjuk ugyanis, hogy a négy beírt 16-szög területeinek összege úgy adja a körülírt 16 szög területének a kétszeresét, hogy a legkisebb és legnagyobb közülök, valamint a két középső különkülön épen egyszer adják a körülírt sokszög területét.

E körülmény arra irányítja a figyelmünket, hogy érdemes megvizsgálni, mely esetekben lesz az általunk definiált τ sokszög egy valódi csillagsokszögnek a magva és mikor nem.

Legyen $n = 2k$. Ha a

$$0, 1, 2, \ldots, k-1, \ldots, 2k-1$$

pontok a kör kerületét n egyenlő részre osztják, látnivaló, hogy a 0, k átmérőt ad, s a 0, $k-1$ adja annak a csillagidomnak az oldalát, a melynek a magvát τ_n-nel jelöltük. Hogy valódi sokszöget kapunk-e vagy sem, az attól függ, vajjon $k-1$ relativ prim-e az n-hez, vagy nem. De rögtön világos, hogy ha k páratlan, akkor $k-1$ páros s így van az n-nel közös osztója. Ha ellenben k páros, mondjuk:

$$k = 2l,$$

akkor

$$(n, k-1) \sim (4l, 2l-1) \sim (l, 2l-1) \sim 1,$$

mert az l-nek minden osztója osztója a $2\,l$-nek is, és így nem lehet valódi osztója a $(2l-1)$-nek.

Valódi sokszögre tehát akkor és csak akkor jutunk, ha az n 4-gyel osztható.

Mivel ezekben az esetekben tételünk közelebbi vonatkozásba lép a Rados-féle tételekkel, sőt azt lehet mondani, hogy közvetlenebb általánosítását adja a kiindulásul választott két tételnek, czélszerű lesz azt ez esetekre külön is megfogalmazni.

I.* *Ha az oldalak száma 4-gyel osztható, a körbeírt közönséges n-szög területe és az ugyanazon oldalszámmal biró beírt csillagsokszögek magvai közül a legkisebbnek a területe együttvéve épen akkorák, mint az illető kör köré írt szabályos n-szög területe.*

Sőt mindjárt általánosan kimondhatjuk azt a tételt is, a mely ennek és a Rados-féle tételnek olynemű összekapcsolásából következik, mint a minőt $n=16$ esetében láttunk. Tekintetbe véve, hogy ezekben az esetekben $\varepsilon_n=0$ és $\frac{\varphi(n)}{4}$ egész szám, ez így fogalmazható.

II. *Ha az oldalak száma 4-gyel osztható, a körbeírt összes különböző csillagsokszögek magvai közül a* $\left(\frac{\varphi(n)}{2}-2\right)$ *-számú nagyobbak összeadva,* $\left(\frac{\varphi(n)}{4}-1\right)$ *-szer akkora területet adnak, mint az illető körülírt sokszög területe.*

Még néhány megjegyzést kell tennünk, hogy mely n-nél kezdődik tételeink érvényessége. Főleg az I* az, mely előtérbe helyezi az $n=4$ esetét. Azt látjuk, hogy itt nem lehet csillagsokszögről beszélni, de ép úgy az oldalakra merőleges átlókról sem. Ha azonban a τ sokszöget egyszerűen úgy származtatjuk, hogy az oldalak végpontjaiban merőlegeseket emelünk (tekintet nélkül arra, vajjon átlók-e azok), akkor azt kapjuk, hogy τ_4 nem egyéb, mint t_4 és így a

$$T_4 - t_4 = \tau_4,$$

illetőleg a

$$T_4 = t_4 + \tau_4$$

nem egyéb, mint az ismeretes

$$T_4 = 2t_4,$$

a mely mint speczialis eset a Rados-féle tételben is bennfoglaltatik (l. i. h. 67. lap, 2. ábra).

Az egész tehát a fogalmazástól függ. Az I-et ennek megfelelően át is lehetne fogalmazni, a mi által három esetre is nyernénk találkozást a RADOS-féle tételekkel. Az I*-nál azonban ez nem volna czélszerű, mert így a $T_4 = 2t_4$ tételnek elvégre is csak túlságosan komplikált fogalmazásához jutnánk. Elég, ha azt jegyezzük meg, hogy ha a fentebbi fogalmazás fel is mondja a szolgálatot, mikép lehet a lényegre áttérni.

A II-nek még $n = 8$ és 12 esetén sincs értelme, érvényessége csak $n = 16$-nál kezdődik. Sőt tulajdonképen ez eseten kívül csupán még az $n = 20$ és 24 esetére érdekes, a midőn is szóról-szóra úgy állnak a viszonyok, mint a hogy fentebb $n = 16$-ra kimondottuk, a minek az a magyarázata, hogy $\varphi(20)$ és $\varphi(24)$ ugyanakkorák, mint $\varphi(16)$.

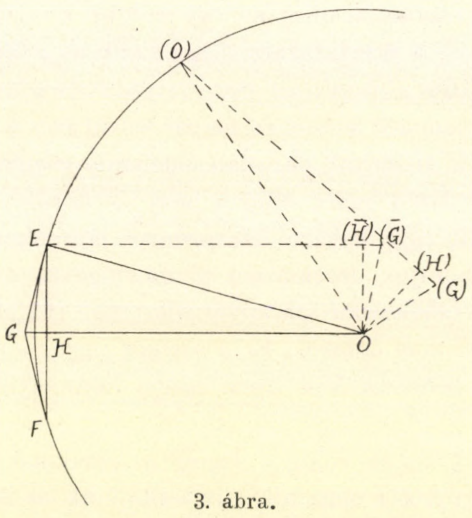
Végül tán nem lesz felesleges, ha pár szóval arra is utalunk, hogy mikép állnak a viszonyok páratlan oldalszám esetén. Azt ez esetekben is meg lehet tenni, hogy a beirt és körülirt sokszög különbségét, mint egyenlőszárú háromszögek lánczolatát, a magasságok által felbontjuk derékszögű háromszögekre és ezeket ismét egy ugyanoly oldalszámú szabályos sokszöggé rakjuk össze. De ez magában véve nem érdekes. Ez a sokszög ugyanis páratlan oldalszám esetén *sohasem* lesz épen magja valamelyik beirt csillagidomnak.

Legközelebb fekvő volna e végből az oldalakat (vagy czélszerűbben a beirt körök sugarait) kiszámitanunk és összehasonlítanunk, de a következő egyszerű szemléleti bizonyítás gyorsabban és kényelmesebben győz meg és inkább összhangban van eddig követett módszerünkkel, mely pusztán szemléleti alapon, úgyszólván minden számítás nélkül, szolgáltatta eredményeinket.

Ha ugyanis a GHE háromszöget nem magában, hanem OHE-vel együtt vágjuk ki és helyezzük el a középpontban, úgy hogy az E csúcs az O-ba essék, G és H pedig egyelőre tetszőlegesen (G) és (H)-ba (3. ábra), akkor az a csúcs, a mely eredetileg O-ba esett, most a kör kerületére fog jutni (O)-ba.

Forgassuk most egyszerűen az egész kivágott idomot addig, míg (O) az E-be jut. Akkor látható, hogy a $\overline{(G)}\,\overline{(H)}$ meghosszabbítása csakis páros oldalszám esetén lehet egy oly szabályos csillagidom oldala, mely ugyanazokra az osztáspontokra támaszkodik, mint a közbeírt közönséges szabályos sokszög: az ily csillagidom oldalai ugyanis a beírt sokszög húrjai, de a mint az ábra mutatja, a $(\overline{G})$ $(\overline{H})$ meghosszabbítása merőleges az EF oldalra, ily tulajdonságú húrok pedig páratlan oldalszámú szabályos sokszögben nem lehetségesek.

A viszonyok tehát így állanak: ha a kör kerületét n egyenlő részre osztva megrajzoljuk az összes beírt csillagsokszögeket, ezek



3. ábra.

között csakis akkor lesz olyan, a melynek magva épen a beírt és körülírt szabályos n-szög külömbségével egyenlő, ha az n osztható 4-gyel, ha azonban az n csak egyszerűen páros, akkor már az ugyanazon osztáspontokra támaszkodó csillagidomok közül azokat is meg kell engednünk, a melyek nem írhatók le egyetlen egy törtvonallal, de ha n páratlan, még ezek között sincs olyan, a melynek a magva épen a körülírt és beírt n-szög külömbségét adná.

Visnya Aladár.

NÉHÁNY ABSZOLUT GEOMETRIAI ELEMI TÉTELRŐL.

Az EUKLIDES-féle geometria elemeiből ismeretesek a következő tételek:

1. Valamely körben az átmérők fölé szerkesztett kerületi szögek derékszögek. (TALES tétele.)

2. Ugyanazon körben, vagy egyenlő sugarú körökben, az ugyanazon az íven, vagy egyenlő íveken álló kerületi szögek egymással mind egyenlők és félakkorák, mint az ezeken az íveken álló középponti szögek.

3. Valamely körben a belső szög egyenlő a szög szárai között fekvő íveken álló középponti szögek fél összegével.

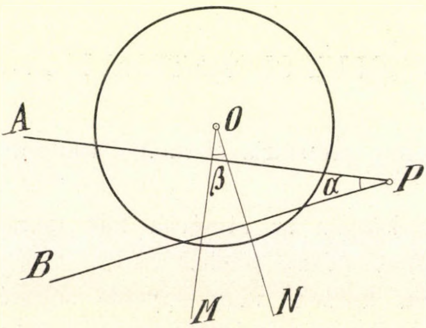
4. Valamely körben a külső szög egyenlő a szög szárai között fekvő íveken álló középponti szögek fél különbségével.

Megjegyzem, hogy az 1. tétel a 2.-nak, az 1. és 2. a 3. és 4. tételnek speczialis esete.

E tételek bebizonyítása összefügg EUKLIDES XI. axiómájával és így az abszolut geometriában nem tekinthetők érvényeseknek. E soraimnak czélja az ezeknek a tételeknek megfelelő és az abszolut geometriában, még pedig az egyszerű elliptikus és hiperbolikus síkban érvényes tételeket bebizonyítani. A tárgyalást három részre osztom. Az első ezeket a tételeket a legegyszerűbb alakban adja. A másodikban az első részben bebizonyított tételekből négy új tételt vezetek le, míg a harmadik részben egy általánosabb jellegű projektiv-geometriai tételt bizonyítok be, melyből az első és második részben bebizonyított tételek leszármaztathatók.

I.

Előre bocsátom, hogy az olyan középponti szöget, melynek szárai valamely α szög száraira merőlegesek és az α szög szá-



1. ábra.

raival egy értelemben következnek, *az α-nak megfelelő középponti szög*nek fogom nevezni. Így $\beta = MON\measuredangle$ az $\alpha = APB\measuredangle$-nek megfelelő középponti szög. (1. ábra.)

Ennek alapján az itt bebizonyítandó négy tételt így fogalmazhatjuk:

1. *Valamely körben az átmérő fölé szerkesztett kerületi szögeknek megfelelő középponti szögek derékszögek.* (A Tales-tételnek megfelelő tétel.)

2. *Ugyanabban a körben, vagy egyenlő sugarú körökben az ugyanazon az íven, vagy egyenlő íveken álló kerületi szögeknek megfelelő középponti szögek mind egyenlők és félakkorák, mint az ezekhez az ívekhez tartozó középponti szögek.*

3. *Valamely körben a belső szögnek megfelelő középponti szög egyenlő a szög szárai között fekvő íveken álló középponti szögek fél összegével.*

4. *Valamely körben a külső szögnek megfelelő középponti szög egyenlő a szög szárai között fekvő íveken álló középponti szögek fél különbségével.*

(A)

E tételek bebizonyítása egészen elemi megfontolásokon alapszik.

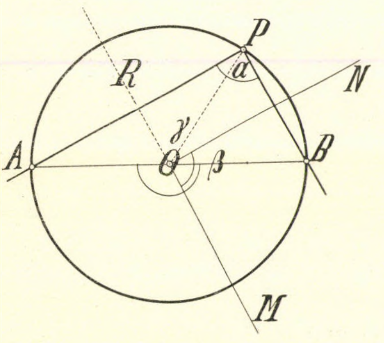
Az (A) alatti 1. tétel bebizonyítása. (2. ábra.) Az $\alpha = APB\sphericalangle$-nek megfelel a $\beta = MON$ középponti szög; az utóbbinak mellékszöge $\gamma = NOR\sphericalangle = \pi - \beta$. De

$$\gamma = NOP\sphericalangle + POR\sphericalangle = \frac{1}{2} BOP\sphericalangle + \frac{1}{2} POA\sphericalangle = \frac{1}{2} AOB = \frac{\pi}{2},$$

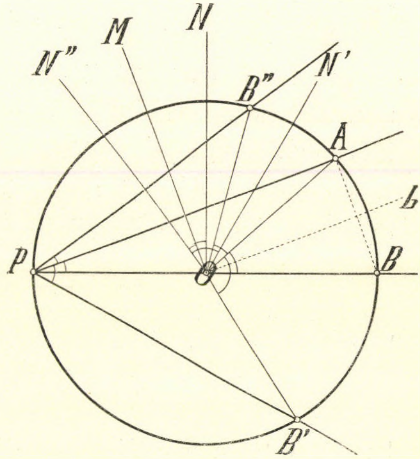
és így $\beta = \pi - \gamma = \frac{\pi}{2}$, a mi bebizonyítandó volt.

Az (A) alatti 2. tétel bebizonyítása. (3. ábra.) Itt három eset lehetséges.

1. eset. A kerületi szög egyik szára átmegy a kör középpontján. A kerületi szög $\alpha = APB$ és a neki megfelelő közép-



2. ábra.



3. ábra.

ponti szög $\beta = MON$; az AB íven álló középponti szög $\gamma = AOB$ és így, minthogy $OL \perp AB$-re;

$$AOL\sphericalangle = LOB\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}\cdot$$

Az előbbi tétel bebizonyításánál láttuk, hogy

$$MOL\sphericalangle = \frac{\pi}{2};$$

máskülönben

$$NOB\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$$

lévén,

$$\beta = MON\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - NOL\sphericalangle = LOB\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}\cdot$$

Ezzel a tétel erre az esetre be van bizonyítva.

2. eset. A kör középpontja a kerületi szög szárai között van. Legyen most a kerületi szög $\alpha' = APB'\sphericalangle$ (3. ábra) és a neki megfelelő középponti szög $\beta' = MON'\sphericalangle$. Az AB' íven álló $\alpha' = APB'$ kerületi szöget a PB átmérő két részre osztja. Az egyik rész $\alpha'_1 = APB$, a másik $\alpha'_2 = BPB'$. Az elsőnek megfelelő középponti szög $\beta'_1 = MON\sphericalangle$, a másiknak megfelelő pedig $\beta'_2 = NON'$. Így

$$\alpha' = \alpha'_1 + \alpha' \quad \text{és} \quad \beta' = \beta'_1 + \beta'_2.$$

Ha az AB íven álló középponti szög $AOB\sphericalangle = \gamma'_1$ és a BB' íven álló középponti szög $BOB'\sphericalangle = \gamma'_2$, akkor az AB' íven álló középponti szög: $\gamma' = AOB'\sphericalangle = \gamma'_1 + \gamma'_2$.

Minthogy azonban az $APB\sphericalangle$ és $BPB'\sphericalangle$ olyan kerületi szögek, melyeknek egyik szára a középponton átmegy, azért

$$\beta'_1 = \frac{\gamma'_1}{2} \quad \text{és} \quad \beta'_2 = \frac{\gamma'_2}{2}$$

és így

$$\beta' = \beta'_1 + \beta'_2 = \frac{\gamma'_1}{2} + \frac{\gamma'_2}{2} = \frac{\gamma'}{2}\cdot$$

Ezzel a tétel a második esetre is be van bizonyítva.

3. eset. A kör középpontja a kerületi szög szárain kívül van. Itt legyen a kerületi szög $\alpha'' = APB''$, míg a neki megfelelő középponti szög $\beta'' = MON''$. (3. ábra.) Az AB'' köríven álló középponti szög $\gamma'' = AOB''\sphericalangle$. Legyen most $BPB''\sphericalangle = \alpha''_1$, $BPA\sphericalangle = \alpha''_2$; $NON''\sphericalangle = \beta''_1$ és $NOM\sphericalangle = \beta''_2$; $BOB''\sphericalangle = \gamma''_1$ és $BOA\sphericalangle = \gamma''_2$, akkor az adott kerületi szög $\alpha'' = \alpha''_1 - \alpha''_2$, a neki megfelelő középponti szög $\beta'' = \beta''_1 - \beta''_2$ és az AB'' köríven álló középponti szög $\gamma'' = \gamma''_1 - \gamma''_2$.

Minthogy az α''_1 és α''_2 kerületi szögek egyik szára a kör középpontján megy át, az 1. esetből következik:

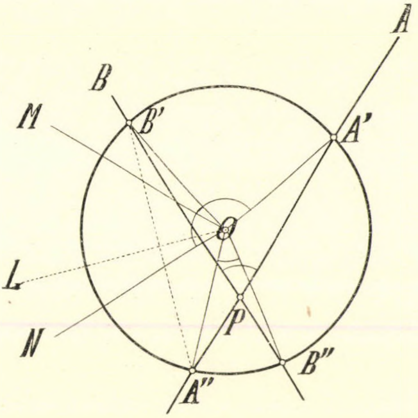
$$\beta''_1 = \frac{\gamma''_1}{2} \quad \text{és} \quad \beta''_2 = \frac{\gamma''_2}{2},$$

miből

$$\beta'' = \beta''_1 - \beta''_2 = \frac{\gamma''_1}{2} - \frac{\gamma''_2}{2} = \frac{\gamma''}{2}.$$

Ezzel az (A) alatti 2. tétel teljesen be van bizonyítva.

Az (A) alatti 3. tétel bebizonyítása. (4. ábra.) Legyen a belső szög $\alpha = APB\measuredangle$ és a neki megfelelő középponti szög



4. ábra.

$\beta = MON\measuredangle$. A szárai között fekvő köríveken álló középponti szögek $\gamma_1 = A'OB'\measuredangle$ és $\gamma_2 = A''OB''\measuredangle$. Az $A'A''B'\measuredangle$ megfelelő középponti szöge $\beta_1 = MOL\measuredangle$ és az $A''B'B''\measuredangle$ megfelelő középponti szöge $\beta_2 = LON$. Tehát $\beta = \beta_1 + \beta_2$. De az (A) alatti 2. tétel szerint

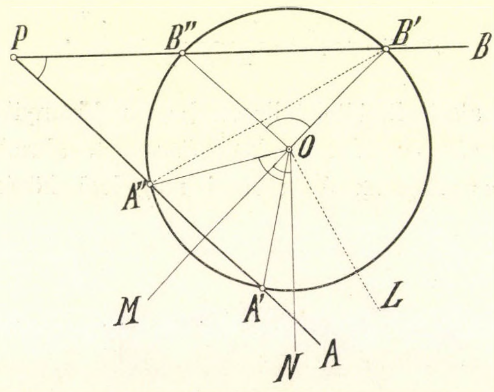
$$\beta_1 = \frac{\gamma_1}{2} \quad \text{és} \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2}$$

és így

$$\beta = \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Ezzel az (A) alatti 3. tétel be van bizonyítva.

Az (A) alatti 4. tétel bebizonyítása. (5. ábra.) Legyen valamely külső szög $\alpha = APB\measuredangle$, és a neki megfelelő középponti szög $\beta = MON\measuredangle$. Az α szög szárai között fekvő köríveken álló középponti szögek $\gamma_1 = A'OB'$ és $\gamma_2 = A''OB''\measuredangle$. Az $A'A''B'$ kerületi szögnek megfelelő középponti szög $\beta_1 = MOL$ és az



5. ábra.

$A''B'B''\measuredangle$ megfelelő középponti szöge $\beta_2 = LON\measuredangle$. Tehát $\beta = \beta_1 - \beta_2$. De az ($A$) alatti 2. tétel szerint

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1}{2} \quad \text{és} \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2}$$

és így

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2},$$

vagyis

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}.$$

Ezzel az (A) alatti 4. tétel be van bizonyítva.

II.

A most bebizonyított tételekből, értekezésem e második részében, négy más tételt fogok bebizonyítani. Mielőtt azonban erre áttérnék, a következőket bocsátom előre.

Ismeretes, hogy az abszolut geometriában a sík végtelenben fekvő pontjainak geometriai helyét körnek tekintjük. Ez a végtelenben fekvő kör az elliptikus síkban képzetes, a hiperbolikusban valós. A sík valamely pontjának erre a körre vonatkozó polárisa az illető pont *abszolut polárisa* és valamely egyenesnek e körre vonatkozó pólusa, az illető egyenes *abszolut pólusa.*

A síkban fekvő összes egyenesek, melyek valamely adott egyenesre merőlegesek, az adott egyenes abszolut pólusában metszik egymást; és valamely pont abszolut polárisa a ponton átmenő összes egyenesekre merőleges. Valamely egyenes minden pontja az abszolut pólusától $\frac{k\pi}{2}$ távolságra van, hol k állandó; ez az állandó számérték, mely a választott hosszúságegységtől függ, az elliptikus síkban valós, a hiperbolikusban képzetes. Két pont, mely a végtelenben fekvő körre nézve konjugált pólus, egymástól szintén $\frac{k\pi}{2}$ távolságra van.

Ha valamely α szög csúcsa abszolut polárisának ama része, mely a szög szárai között van a, akkor

$$a = k \, . \, \alpha. \tag{1}$$

Ugyancsak ez az egyenlet áll fenn akkor is, ha a két tetszőleges pont távolságát és α a két pont abszolut polárisai képezte szöget jelenti.

Valamely derékszög két szára a csúcsának abszolut polárisát két konjugált abszolut pólusban metszi.

Ezeknek előre bocsátása után áttérek a következő négy tétel bebizonyítására:

1. *Valamely kör-átmérő fölé szerkesztett kerületi szög szárai a kör középpontjának abszolut polárisát két konjugált abszolut pólusban metszik.*

2. *A kör középpontja abszolut polárisának az a része, mely valamely kerületi szög szárai között fekszik félakkora, mint az, mely a kerületi szög ívén álló középponti szög szárai között fekszik.* (B)

3. *A kör középpontja abszolut polárisának az a része, mely valamely belső szög szárai között fekszik, egyenlő ama részeinek félösszegével, melyek a szög*

szárai között fekvő köríveken álló középponti szögek szárai között feküsznek.

4. *A kör középpontja abszolut polárisának az a része, mely valamely külső szög szárai között fekszik, egyenlő ama részeinek félkülönbségével, melyek a külső szög szárai között fekvő köríveken álló középponti szögek szárai között feküsznek.* (B)

E négy tételt az (A) alatti tételek alapján a következő segédtétel felhasználásával nyerjük:

Segédtétel. *A kör középpontja abszolut polárisának az a része, mely valamely szög szárai között fekszik k-szorosa az illető szög megfelelő középponti szögének.*

Legyen ugyanis valamely $APB\sphericalangle$ AP szárának és a kör középpontja abszolut polárisának (1. ábra) metszéspontja A_0, míg a PB szára a középpont absz. polárisát B_0-ban metszi. Az A_0 pont azonban az MON szög OM szárának abszolut pólusa, mert egyrészt $AP \perp MO$-ra és így az MO abszolut pólusa rajta van az AP egyenesen, másrészt pedig MO átmegy az O ponton és így abszolut pólusa rajta van az O abszolut polárisán. De így az MO abszolut pólusa az AP egyenes és az O abszolut polárisának metszéspontja, tehát A_0. Hasonló módon bebizonyítjuk, hogy az ON egyenes abszolut pólusa a B_0 pont. Az (1) alatti egyenletből következik azután, hogy

$$\overline{A_0B_0} = k \,.\, MON\sphericalangle = k \,.\, \beta\,;$$

ezzel a segédtétel be van bizonyítva. Ezután áttérek a (B) alatti tételek bebizonyítására.

A (B) *alatti 1. tétel bebizonyítása.*

Az AB átmérőn álló (2. ábra) $\alpha = APB$ kerületi szög AP szárának és az O középpont abszolut polárisának A_0 metszéspontja, az MO szár abszolut pólusa lévén — mint ezt a segédtétel bebizonyítása folyamán láttuk — azon egyúttal az MO-ra merőleges NO szár is áthalad. Vagyis, az A_0 pont az NO egyenes és az O középpont abszolut polárisának metszéspontja.

Hasonló módon bebizonyíthatjuk, hogy az α szög PB szárának és az O polárisának metszéspontja: B_0, az a pont, melyben MO az O abszolut polárisát metszi. Minthogy az $MON\sphericalangle$ derékszög, ez tehát csúcsának abszolut polárisát konjugált abszolut pólusokban metszi. Így A_0 és B_0 két konjugált abszolut pólus.

A (B) alatti 2. tétel bebizonyítása.

Tegyük fel, hogy valamely α kerületi szög szárai A_0 és B_0 pontokban metszik a kör középpontjának abszolut polárisát. Az α-nak megfelelő középponti szög legyen β és az α szög szárai között fekvő íven álló középponti szögnek, γ-nak szárai A_1 és B_1 pontokban metszik a középpont abszolut polárisát. Az említett segédtétel folytán

$$\overline{A_0B_0} = k\beta, \tag{2}$$

míg az (1) képlet szerint

$$\overline{A_1B_1} = k\gamma, \tag{3}$$

a hol $\overline{A_0B_0}$ és $\overline{A_1B_1}$ a középpont abszolut polárisának az a része, mely az α, ill. a γ szög szárai között van. Minthogy (A) alatti 2. tétel szerint

$$\beta = \frac{\gamma}{2},$$

azért a (2) és (3) alatti egyenletből következik:

$$\overline{A_0B_0} = \tfrac{1}{2} . \overline{A_1B_1}.$$

Ezzel a (B) alatti 2. tétel be van bizonyítva.

A (B) alatti 3. és 4. tétel bebizonyítása.

Legyen valamely belső, vagy külső szög α és a kör középpontja abszolut polárisának az a része, mely e szög szárai között fekszik: $\overline{A_0B_0}$. Az α szög szárai között fekvő köríveken álló középponti szögek legyenek γ_1 és γ_2 és a középpont abszolut polárisának azok a részei, melyek e szögek szárai között vannak, legyenek $\overline{A_1B_1}$ és $\overline{A_2B_2}$. Ha most az α szög megfelelő középponti szöge β, akkor a segédtétel szerint

$$\overline{A_0B_0} = k\beta \tag{2}$$

és az (1) alatti képlet folytán

$$\overline{A_1B_1} = k\gamma_1, \quad \overline{A_2B_2} = k\gamma_2. \tag{4}$$

Minthogy az (*A*) alatti 3. és 4. tétel értelmében

$$\beta = \frac{\gamma_1 \pm \gamma_2}{2},$$

azért a (2) és (4) alatti egyenletekből következik:

$$\overline{A_0B_0} = \frac{\overline{A_1B_1} \pm \overline{A_2B_2}}{2},$$

hol belső szög esetében a felső, külső szög esetében az alsó előjel veendő.

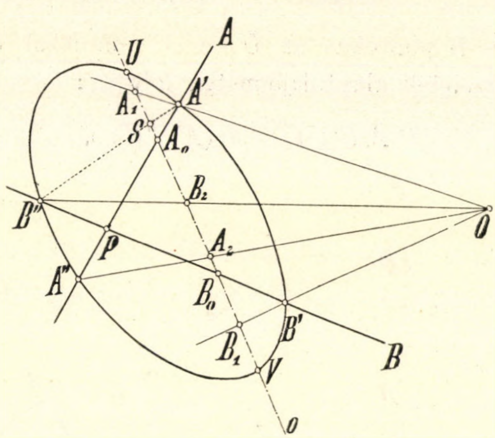
Ezzel a (*B*) alatti 3. és 4. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzem, hogy az elliptikus geometriában úgy az (*A*) alatti, mint a (*B*) alatti tételek egyformán fontosak; ellenben a hiperbolikus geometriában a közönséges körökre nézve az (*A*) alatti tételek, míg a hiperciklusokra a (*B*) alattiak fontosabbak. Paraciklusok esetében az összes középponti szögek zérussal egyenlők; de az (*A*) alatti tételek ekkor is érvényesek, ha csak a bennök előforduló középponti szögek mérőszámai helyébe az e szögek szárai között fekvő paraciklusívek mérőszámait teszszük.

III.

Értekezésem első és második részében bebizonyított tételek szögek, illetőleg hosszúságok között fennálló méreti összefüggéseket fejeznek ki. Ismeretes azonban, különösen LAGUERRE, CAYLEY és KLEIN FÉLIX vizsgálataiból, hogy a méreti geometria tételei általánosabb, projektiv-geometriai tételeknek speciális esetei. Értekezésem e harmadik részében azt a projektiv-geometriai tételt fogom bebizonyítani, melynek a második részben (*B*) alatt foglalt tételek speciális esetei.

Legyen a sík egy tetszőleges *O* pontjának valamely kúpszeletre vonatkozó polárisa *o* (6. ábra), és ennek a kúpszelettel való metszéspontjai U, V. Az $APB\measuredangle$-nek PA szára A_0-ban, a PB szára B_0 pontban metszi az o egyenest. Továbbá a PA szár a kúpszeletet az A' és A'', a PB szár a B' és B'' pontokban metszi, úgy hogy $A'B'$ és $A''B''$ kúpszelet-ívek az $APB\measuredangle$-ön,



6. ábra.

vagy annak a csúcsszögén belül vannak. Vetítsük most az A', B', A'', B'' pontokat az O pontból, mint vetítő czentrumból az o egyenesre és legyenek e pontok projekcziói sorban: A_1, B_1, A_2, B_2.

A tétel, melyet most be akarok bizonyítani, a következő:

Az (A_0B_0UV) kettősviszony az (A_1B_1UV) és (A_2B_2UV) kettősviszonyok geometriai középarányosa, azaz:

$$(A_0B_0UV)^2 = (A_1B_1UV)(A_2B_2UV). \qquad (C)$$

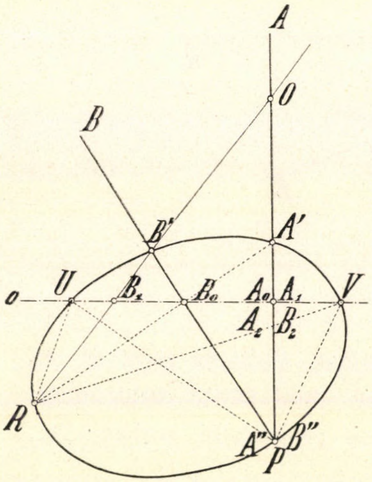
E tételnek előbb azt a speciális esetét bizonyítjuk be, midőn az $APB\measuredangle$ P csúcsa a kúpszelet egyik pontja, és a PA szára az O ponton átmegy (7. ábra). A jelölések ugyanazok, mint az előbbi általános esetben. E speciális esetben az A'' és B'' pontok P-vel, A_0 A_1-gyel és A_2 B_2-vel esik egybe. Az OB_1 egyenes a B' ponton kívül még az R pontban metszi a kúpszeletet. Az RA' és PB' egyenesek az o egyenes B_0 pontjában metszik egymást.

A jelen esetben $(A_2B_2UV)=1$ lévén, a bebizonyítandó tétel a következő egyenlettel van kifejezve:

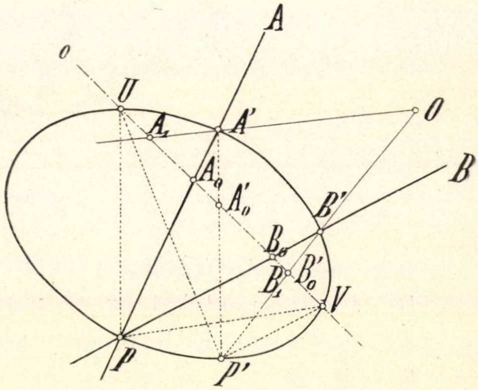
$$(A_0B_0UV)^2=(A_1B_1UV). \qquad (5)$$

Ha a P és R pontokat az U és V pontokkal összekötjük, akkor a kúpszeletek alaptulajdonsága folytán:

$$P(A'B'UV)=R(A'B'UV),$$



7. ábra.



8. ábra.

és e sugaraknak o-val való metszéspontjaira nézve:

$$(A_0B_0UV)=(B_0B_1UV).$$

Minthogy azonban A_0 és A_1 azonos pontok, áll a következő azonosság:

$$(A_0B_0UV)=(A_1B_0UV).$$

A két utolsó egyenlet szorzásából nyerjük azután az (5) alatti egyenletet.

Ezután áttérhetünk arra az esetre, midőn a P csúcs ugyan a kúpszeleten van, de a szög egyik szára sem halad át az O ponton. (8. ábra.)

Határozzuk meg az OB' egyenesnek a kúpszelettel való másik metszéspontját P'-t, és kössük azt össze A'-vel. Továbbá kössük össze úgy P-t, mint P'-t U és V-vel, úgy a kúpszeletek említett alaptulajdonsága folytán:

$$P(A'B'UV) = P'(A'B'UV),$$

és e sugaraknak o-val való metszéspontjaira nézve:

$$(A_0B_0UV) = (A'_0B_1UV).$$

De az (5) alatti egyenlet folytán:

$$(A'_0B_1UV)^2 = (A_1B_1UV),$$

és így a két utolsó egyenletből:

$$(A_0B_0UV)^2 = (A_1B_1UV).$$

Ezzel a (C) alatti tételt bebizonyítottuk arra az esetre, ha az APB szög csúcsa a kúpszelet pontja.

Most áttérek a teljesen általános esetre. (6. ábra.) Kössük össze A'-t B''-vel, és messe ez az egyenes o-t az S pontban. Most alkalmazhatjuk egyrészt az $A'B''B'$ szögre, másrészt az $A''A'B''$ szögre az (5) alatti egyenletet. Ennek folytán:

$$(SB_0UV)^2 = (A_1B_1UV),$$
$$(A_0SUV)^2 = (A_2B_2UV),$$

és e kettő szorzásából:

$$(A_0B_0UV)^2 = (A_1B_1UV)(A_2B_2UV). \tag{6}$$

Ezzel a (C) alatti tétel teljesen be van bizonyítva.

Most pedig áttérek arra, hogy mikép vezethetők le a (B) alatti tételek a (C) alatti tételből.

Ha ugyanis a kúpszelet kör és O annak középpontja, akkor az o poláris azonos az O pont abszolut polárisával, az U, V pontok pedig egyúttal azok a pontok, melyekben a kör a végtelenben fekvő kört érinti. KLEIN FÉLIX bebizonyította,* hogy két pont: A és B egymástól való távolsága, ha az AB egyenes

* *Mathematische Annalen* IV. és VI. kötetében.

a végtelenben fekvő kört az U és V pontokban metszi, a következő:

$$\overline{AB} = \frac{ki}{2} \operatorname{lognat}(ABUV).$$

Ha most a (6) alatti egyenletet logaritmáljuk és $\frac{ki}{2}$-vel megszorozzuk, lesz:

$$2 \cdot \frac{ki}{2} \operatorname{lognat}(A_0B_0UV) = \frac{ki}{2} \operatorname{lognat}(A_1B_1UV) +$$
$$+ \frac{ki}{2} \operatorname{lognat}(A_2B_2UV).$$

De

$$\frac{ki}{2} \operatorname{lognat}(A_0B_0UV) = \overline{A_0B_0},$$
$$\frac{ki}{2} \operatorname{lognat}(A_1B_1UV) = \overline{A_1B_1},$$
$$\frac{ki}{2} \operatorname{lognat}(A_2B_2UV) = \overline{A_2B_2},$$

és így

$$\overline{A_0B_0} = \frac{\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2}}{2}. \tag{7}$$

Ez megegyezik a (B) alatti 3. tétellel. De a 4. tétel is következik belőle. Ha ugyanis az $APB\sphericalangle$ szög csúcsa a körön belül van, akkor az $\overline{A_1B_1}$ és $\overline{A_2B_2}$ távolságok egyenlő értelműek; ha azonban a P csúcs a körön kívül van, akkor ezek ellenkező értelműek. Ha tehát ebben az esetben az $\overline{A_1B_1}$ távolságot pozitivnak veszszük, akkor az $\overline{A_2B_2}$ negativ. Ha pedig csak a hosszúságok abszolut értékére szorítkozunk, akkor $\overline{A_2B_2}$ helyébe $-\overline{A_2B_2}$ teendő és akkor a (7) alatti képlet átmegy a következőbe:

$$\overline{A_0B_0} = \frac{\overline{A_1B_1} - \overline{A_2B_2}}{2}.$$

Ezzel a (B) alatti 4. tételt is leszármaztattuk a (C) alatti tételből. A (B) alatti 1. és 2. tétel a 3. és 4.-nek speciális esetei, azért fölösleges őket külön leszármaztatni.

Privorszky Alajos.

EGY TÉTEL A HATVÁNYSOROK MARADÉKTAGJÁRA VONATKOZÓLAG.

1. Ha az $F(x)$ analytikai függvénynek a zérus hely reguláris pontja és a legközelebbi szinguláris helye: a_1 elsőrendű polus, továbbá az $|a_1|$ sugarú körön más szingularitása nincsen, akkor, miként Kőnig Gyula úr kimutatta,[1] az

$$F(x) = \Sigma a_n x^n$$

Taylor-sor maradéktagjaira vonatkozólag a következő érdekes reláczió áll fenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{R_{n+1}(a)}{R_n(a)} = \frac{a}{a_1}, \tag{1}$$

ha az a az $|a_1|$ sugarú kör bármely belső helyét jelenti. A Kőnig-féle értekezés főeredménye voltaképpen nem ez, hanem az a fontos tétel, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a_1.$$

E tétel csak kezdete azon mélyreható vizsgálatoknak, melyek az együtthatókból következtetnek a szingularitásokra. Ezek között legfontosabbaknak tekinthetők e Kőnig-féle tételt általánosító Hadamard-féle tételek.[2] A következő néhány sorban azt akarom megmutatni, hogy ezen Hadamard tételek segítségével miképpen lehet az 1) alatti Kőnig-féle tétel általánosítását is megállapítani.

---

[1] Kőnig: Über eine Eigenschaft der Potenzreihen. Math. Ann. 23. p. 447.

[2] Hadamard: Sur la recherche des discontinuités polaires. Comptes rendus 1889. (L. pl. Hadamard: La serie de Taylor. Scientia Nr. 12, p. 42.)

2. Tegyük fel, hogy a

$$\Sigma a_n x^n$$

hatványsor által előállított $F(x)$ analytikai függvény polusai

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r,$$

a hol

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3| \ldots \leq |\alpha_r|$$

és az $F(x)$-nek az $|\alpha_r|$ sugarú körön belül (és e körön) más szingularitása nincsen. Kimutatjuk, hogy ha $|a| < |\alpha_1|$, akkor az

$$\Sigma R_n(a)\, x^n$$

hatványsor által előállított $\psi(x)$ függvénynek polusai megfelelően:

$$\frac{\alpha_1}{a}, \frac{\alpha_2}{a}, \ldots, \frac{\alpha_r}{a}.$$

Ugyanis a

$$\Sigma a_n a^n x^n$$

a $\Sigma a_n z^n$-ből $z = ax$ transzformáczióval keletkezik, tehát szingularitásai az

$$\frac{\alpha_1}{a}, \frac{\alpha_2}{a}, \ldots, \frac{\alpha_r}{a}$$

polusok. Alkossuk most meg a

$$\varphi(x) = \frac{\Sigma a_n a^n x^n}{1-x}$$

függvényt. Ennek ugyanazon polusai vannak, mint a számlálónak és még legfölebb az $x = 1$ elsőrendű polus. Ez a $\varphi(x)$ még így is írható:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \Sigma(a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \cdots + a_n a^n)\, x^n \\ &= \Sigma\,[F(a) - R_{n+1}(a)]\, x^n \\ &= \frac{F(a)}{1-x} - \Sigma R_{n+1}(a)\, x^n.\end{aligned}$$

És innen:

$$\Sigma R_{n+1}(a)\, x^{n+1} = x\left[\frac{F(a)}{1-x} - \varphi(x)\right].$$

A $\varphi(x)$ számlálójában előforduló $\Sigma a_n a^n x^n$ convergentia köre 1-nél nagyobb sugarú, mert $|a| < |a_1|$, tehát $x=1$ környezetében kifejtve, első tagja éppen $F(a)$ lesz, vagyis $\varphi(x)$ ilyen alakú:

$$\varphi(x) = \frac{F(a)}{1-x} + R(1-x),$$

a hol $R(1-x)$ az $1-x$ hatványai szerint haladó sor. Ebből következik, hogy a $\Sigma R_{n+1} x^{n+1}$ sor által előállított analytikai függvénynek az $x=1$ hely nem polusa, tehát a kezdőponthoz legközelebb eső polusai valóban az

$$\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \dots, \frac{a_r}{a}$$

és az is következtethető, hogy az $\left|\frac{a_r}{a}\right|$ sugarú kör belsejében (és e körön) más szinguláris hely nincsen.

3. Most már alkalmazhatjuk a következő Hadamard tételt: Ha a $\Sigma b_n x^n$ hatványsor által előállított analytikai függvénynek a kezdőponthoz legközelebbi szingularitásai

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r,$$

a hol

$$|\beta_1| \leqq |\beta_2| \leqq \dots |\beta_r|$$

és a $|\beta_r|$ sugarú körön belül (és e körön) más szingularitás nincsen, akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r},$$

a hol

$$D_n = \begin{vmatrix} b_n, & b_{n+1}, & \dots, & b_{n+r-1} \\ b_{n+1}, & b_{n+2}, & \dots, & b_{n+r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n+r-1}, & b_{n+r}, & \dots, & b_{n+2r-2} \end{vmatrix}$$

Hankel-féle determinans. Alkalmazzuk ezt a tételt a

$$\Sigma R_n(a) x^n$$

hatványsorra. Jelöljük a következő Hankel-féle determinanst:

$$\begin{vmatrix} R_n(a), & R_{n+1}(a), & \ldots, & R_{n+r-1}(a) \\ R_{n+1}(a), & R_{n+2}(a), & \ldots, & R_{n+r}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ R_{n+r-1}(a), & R_{n+r}(a), & \ldots, & R_{n+2r-2}(a) \end{vmatrix}$$

K_n-nel, akkor HADAMARD tétele szerint a 2. pont értelmében:

$$\lim_{n=\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{a^r}{a_1 a_2 \ldots a_r}$$

és ez a KŐNIG-féle tétel általánositása. Ha $r=1$, akkor ez a tétel a

$$\lim \frac{R_{n+1}(a)}{R_n(a)} = \frac{a}{a_1}$$

KŐNIG tételt szolgáltatja.

Beke Manó.

A TÉRFOGALOM GENEZISE.

(Második és befejező közlemény.)

A Borel-féle tétel.

Valamely végesben fekvő ponthalmazról azt mondom, hogy *zárt*, ha minden sűrűsödési helyét tartalmazza. A zárt ponthalmazokra áll a következő

VII. tétel. Ha a valamely zárt ponthalmaz és az u ponthalmazok rendszere olyan, hogy az a halmaz minden pontjához van legalább egy olyan u halmaz, mely a pontnak környezete, akkor az u halmazok rendszerében foglaltatik egy véges számú u halmazból álló rendszer, mely hasonló tulajdonságú.

A tétel analogonja a számhalmazok (ponthalmazok) elméletében Borel-féle tétel, vagy helyesebben általánositott Borel-féle tétel néven ismeretes. Az itt adott tételt röviden szintén Borel-féle tételnek nevezem.

Hogy a tételt igazolhassam, először a *kitüntetett környezet* fogalmát definiálom. Az A pont n-edik kitüntetett környezetének nevezem mindama pontok összességét (A-t is beleszámítva), melyek az A ponttal szomszédosak *(k)*, hol k minden n-nél magasabb értéket fölvesz. A definiczióból következik, hogy ha $m<n$, akkor az A pont m-edik kitüntetett környezete magában foglalja az n-ediket. Lehetséges, hogy az m-edik és n-edik kitüntetett környezet azonosak, de az 1., 3., 4., 11., és 13. föltevésekből következik, hogy az A pont kitüntetett környezetei közt végtelen sok a különböző. A szomszédos *(k)* pontok definicziójából pedig az következik, hogy A az egyetlen pont, mely valamennyi kitüntetett környezetében foglaltatik. Végre a sűrű-

södési pont definicziójából következik, hogy minden kitüntetett környezet a közönséges értelemben is környezet és hogy az A pont minden környezetében foglaltatik egy kitüntetett környezete; hogy tehát *a kitüntetett környezetek a speciális környezeteknek egy kielégítő rendszerét alkotják.* A 8. és 16. föltevésekből következik, hogy valamely végesben fekvő ponthalmaz pontjai n-nél alacsonyabb rendű kitüntetett környezeteinek száma véges. A kitüntetett környezetek rendszere ennélfogva *megszámlálható.*

A sűrűsödési hely definicziójának csupán új fogalmazása, hogy az A pont akkor és csak akkor sűrűsödési helye a t halmaznak, ha minden kitüntetett környezetében van a t halmaznak tőle különböző pontja.

A Borel-féle tételt ezek után a következőképen bizonyítom be: Az a zárt halmaz valamely A pontjához van az u halmazok közt egy vagy több olyan, melyek környezetei; mindegyik ilyen u halmaz magában foglalja az A pont bizonyos kitüntetett környezeteit. Az A pont legalacsonyabb rendű kitüntetett környezetét, mely még valamelyik u halmazban foglaltatik, hozzárendelem az A ponthoz; a megfelelő rendszámot $n\ (A)$-val jelölöm. Ilyen módon a zárt halmaz minden pontjához egy határozott kitüntetett környezet és egy $n\ (A)$ szám rendeltetik. Azt állítom, hogy létezik olyan szám, mely valamennyi $n\ (A)$ számnál nagyobb. Ellenkező esetben a zárt halmaz tartalmazna egy A_1, $A_2, \ldots$ pontsorozatot, úgy, hogy az $n\ (A_1)$, $n\ (A_2), \ldots$ számsorozat folyton növekedő volna. Az A_1, $A_2, \ldots$ végtelen sornak volna legalább egy A^* sűrűsödési helye, mely minthogy az a halmaz zárt, a halmazhoz tartoznék. A 9., 12. és 15. föltevések következtében van az A^* pontnak egy u^* kitüntetett környezete és egy p szám, úgy, hogy minden a kitüntetett környezetbe tartozó pont n-edik kitüntetett környezete benfoglaltatik az A^* ponthoz rendelt $n\ (A^*)$-adik kitüntetett környezetben. Másrészt az A^* pont az A_1, $A_2, \ldots$ sor sűrűsödési helye; ennélfogva a sorozat végtelen sok pontja foglaltatik az u^* környezetben; mindenesetre tehát egy olyan A_k pont is, melyre nézve $n(A_k) > p$. Ez pedig ellenmond az $n(A)$ számok kiválasztási elvének, minthogy az A_k pont egy $n(A_k)$-nál alacsonyabb rendű kitüntetett környezete is benfoglaltatik egy u környezetben. Tehát valóban létezik olyan N szám, mely valamennyi $n(A)$-nál nagyobb. A zárt sokaság pontjaihoz rendelt, egymástól különböző kitüntetett környezetek halmaza e szerint véges. Ha a véges számú környezet mindegyikét egy-egy u halmazzal helyettesítjük, a melyben az illető kitüntetett környezet foglaltatik, végre az u halmazok egy olyan véges rendszerét nyerjük, melyben a zárt ponthalmaz minden pontjához legalább egy környezet található. Ezzel a BOREL-féle tétel igazoltatott.

A tér összefüggő.

Valamely pont halmazt *sűrűnek* mondok, ha a halmaz minden pontja egyszersmind sűrűsödési helye a halmaznak. Az 1,. 3., 4., 11. és 13. föltevésekből következik, hogy minden elemi halmaz sűrű halmaz. Ebből következik, hogy a tér maga is sűrű halmaz.

Minden összefüggő halmaz sűrű; de a sűrű halmaz nem mindég összefüggő. Megmutatom, hogy minden elemi halmaz abszolute összefüggő.

Bontsuk az e elemi halmazt az e_1 és e_2 részhalmazokra. Az e_1+e_2 halmaz valamely a_n n-edrendű fizikai pontban tartalmazott mathematikai pontok összessége. Az e_1+e_2 halmaz sűrű; ha tehát *pl.* e_1 nem sűrű, akkor pontjai közt van olyan, mely az e_2 halmaznak sűrűsödési helye. Ez esetben tehát okvetlenűl van olyan pont, mely az e_1 és e_2 halmazok egyikében tartalmaztatik, a másiknak sűrűsödési helye. Ennélfogva a továbbiakban olyan fölbontásokra szorítkozhatom, melyeknél e_1 és e_2 sűrű halmazok.

Az 1., 3., 4., 14. és 16. föltevések folytán van olyan a_n-ben tartalmazott $a_{n'}$ valódi n'-rendű fizikai pont, a melyben tartalmazott mathematikai pontok részben e_1-hez, részben e_2-höz tartoznak. Ha ezek közül pl. az e_1-hez tartozó pontok száma véges, akkor minden ilyen pont sűrűsödési helye e_2-nek. Ha sem az $a_{n'}$-ben tartalmazott és e_1-hez tartozó, sem az $a_{n'}$-ben tartalmazott és e_2-höz tartozó pontok száma nem véges, akkor ismét van olyan $a_{n'}$-ben tartalmazott $a_{n''}$ valódi n''-edrendű fizikai pont, a melyben tartalmazott mathematikai pontok részben e_1-hez, részben e_2-höz tartoznak.

Vagy van tehát egy olyan a_n-ben tartalmazott fizikai pont, mely az e_1 és e_2 halmazok egyikéből csak véges számú pontot tartalmaz, ez esetben, minthogy az illető pontban tartalmazott elemi halmaz sűrű, ezek a véges számban levő pontok sűrűsödési helyei a másik részhalmaznak.

Vagy pedig van az egymásban tartalmazott valódi fizikai pontoknak egy a_n, $a_{n'}$, $a_{n''}$, . . . végtelen sora, úgy, hogy a sorban foglalt valamennyi fizikai pont úgy az e_1, mint az e_2 halmazból végtelen sok pontot tartalmaz. A fizikai pontoknak ez a sora a 3. föltevés tekintetbevételével egy mathematikai pontot definiál; a definiált pont az e halmazhoz, tehát az e_1 és e_2 halmazok valamelyikéhez tartozik és mindkettőnek sűrűsödési helye.

Bármiképen is bontjuk fel tehát az e elemi halmazt az e_1 és e_2 részhalmazokra, mindig van olyan pont, mely e részhalmazok egyikéhez tartozik és a másiknak sűrűsödési helye. Az elemi halmaz tehát tényleg *abszolut összefüggő.*

Bontsuk fel a tért, mint mathematikai kontinuumot a t_1 és t_2 részhalmazokra. Legyen A_1 a t_1 halmaznak, A_2 a t_2 halmaznak egy-egy pontja. Ha az A_1 és A_2 pontok rendszámai közül a nagyobbat n-nel jelölöm, akkor az n-edik momentán térképzet pontjai közt vannak olyanok, melyek t_1-be, és olyanok is, melyek t_2-be tartozó mathematikai pontokat tartalmaznak. De az 1., 4. és 8. föltevések folytán a momentán térképzet összefüggő; másrészt pedig két megkülönböztethetetlen fizikai pont legalább egy közös mathematikai pontot tartalmaz. Van tehát legalább egy n-edrendű fizikai pont, és ennélfogva egy elemi halmaz, a melyben tartalmazott pontok részben t_1-hez, részben t_2-höz tartoznak. De az elemi halmaz abszolut összefüggő;

vagyis van olyan pont, mely a t_1 és t_2 halmazok egyikéhez tartozik, a másiknak pedig sürüsödési helye. Áll tehát a

VIII. tétel. A tér összefüggő mathematikai kontinuum.

A fizikai kontinuum mint rendezett halmaz.

Valamely fizikai kontinuumról azt mondom, hogy *n-szeresen rendezett*, ha elemeinek minden a, b párja között minden i számra nézve ($i = 1, 2, \ldots, n$) fönnáll a következő három vonatkozás közül az egyik és csak az egyik: $a <_i b$, $a \mid i \mid b$, $a i > b$ és a vonatkozások kielégitik a következő föltevéseket:

1. Ha $a <_i b$, akkor $b i > a$.

2. Ha $a i > b$, akkor $b <_i a$.*

3. Ha $a <_i b$ és $b <_i c$, akkor $a <_i c$.

4. Ha a és b megkülönböztethetetlenek, akkor minden i-re nézve $a \mid i \mid b$.

Az $a <_i b$, $a \mid i \mid b$, $a i > b$ vonatkozásokat a következő mondatokkal fejezem ki: az i-edik rendre nézve *a megelőzi b-t;* az i-edik r. n. *a és b megkülönböztethetetlenek;* az i-edik r. n. *a követi b-t.* Ha $a <_i b$, vagy $a i > b$, akkor azt is mondom: az i-edik r. n. a és b megkülönböztethetők. Az n vonatkozás összességét, melyek az a és b elemek viszonyát szabályozzák, az a, b elempár *rangviszonyának* nevezem.

Az n-szeresen rendezett fizikai kontinuumról akkor mondom, hogy az i-edik rendre nézve összefüggő, ha bármikép bontjuk föl két részhalmazra, a két részhalmazból legalább egyféle módon ki lehet egy-egy elemet választani, melyek az i-edik rendre nézve megkülönböztethetetlenek. Az összefüggő fizikai kontinuum minden rendre nézve összefüggő. Mert bárhogyan is bontjuk fel két részhalmazra, kiválasztható a két részhalmazból egy-egy elem, melyek megkülönböztethetetlenek; a 4. alatti föltevés értelmében a két elem minden rendre nézve megkülönböztethetetlen. A tétel nem fordítható meg. Az n-szere-

* Az első két föltevésből következik: Ha $a \mid i \mid b$, akkor $b \mid i \mid a$.

sen rendezett fizikai kontinuum mind az n rendre nézve összefüggő lehet, a nélkül, hogy mint fizikai kontinuum összefüggő volna.

Az n-szeresen rendezett fizikai kontinuumot *teljesnek* mondom, ha minden n, nem szükségképen különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemhez legalább egy olyan a elem létezik, melyre nézve $a \mid i \mid a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. A teljes n-szeresen rendezett fizikai kontinuumot valódinak mondom, ha minden egyes i-hez van legalább két olyan elem, melyek az i-edik rendre nézve megkülönböztethetők.

A mathematikai kontinuum mint rendezett halmaz.

A többszörösen rendezett halmazok elméletének alapjait más helyütt adom;[*] itt csak azokat a meghatározásokat és eredményeket foglalom össze, melyek e dolgozat czéljaira szükségesek.

Valamely halmazról akkor mondom, hogy *n-szeresen rendezett,* ha elemeinek minden A, B párja között minden i számra $(i=1, 2, \ldots, n)$ fönnáll az $A<i$B, $A \overline{\underline{i}} B$, $A i > B$ vonatkozások közül az egyik és csak az egyik és a vonatkozások kielégítik a következő föltevéseket:

1. Ha $A<iB$, akkor $B i > A$.

2. Ha $A i > B$, akkor $B < i A$.

3. Ha $A<iB$, $B<iC$, akkor $A<iC$.

4. Két különböző A és B elemre nem állhat valamennyi i-re az $A \overline{\underline{i}} B$ vonatkozás.

Föltevéseinkből következik:

Ha $A \overline{\underline{i}} B$, $B \overline{\underline{i}} A$. Ha $A \overline{\underline{i}} B$ és $B<iC$, akkor $A<iC$. Ha $A<iB$ és $B \mid i \mid C$, akkor $A<iC$. Ha $A \overline{\underline{i}} B$ és $B \overline{\underline{i}} C$, akkor $A \overline{\underline{i}} C$.

Az $A<iB$, $A \overline{\underline{i}} B$, $A i > B$ vonatkozásokat a következő mondatok fejezik ki: az i-edik rendre nézve *A megelőzi B-t;* az i-edik r. n. *A egyenrangú B-vel;* az i-edik r. n. *A követi B-t.*

---

[*] L. F. Riesz, Über mehrfache Ordnungstypen I. (Math. Ann. 61. k., p. 406.)

Ha két n-szeresen rendezett halmaz elemei megfordíthatóan egyértelműen rendelhetők egymáshoz úgy, hogy az egymásnak megfelelő elempárok rangvonatkozásai ugyanazok, akkor azt mondom, hogy a két halmaz *hasonlóan rendezett.* Az összes, egymással hasonlóan rendezett halmazok összfogalmát a halmazok *rendjellegének* nevezem.

Ha A a rendezett halmaz egy eleme és ha létezik n olyan $B_1, C_1; \ldots; B_n, C_n$ elempár, melyek eleget tesznek a

$$B_i < i\, A < i\, C_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

vonatkozásoknak, akkor azon U elemek összességét, melyek a

$$B_i < U < i\, C_i$$

vonatkozásokat kielégítik, az A elem *speczialis környezetének* nevezem.

Ha az A elemhez nem található n olyan elempár, melyek a fenti követelést kielégítik, akkor még mindig definiálható az A elemnek *tágabb értelemben vett speczialis környezete* oly módon, hogy a hiányzó B_i, illetve C_i elemeket maga az A elem pótolja.

Az n-szeresen rendezett halmaz, illetve rendjellege *teljes,* ha bármely n különböző vagy részben azonos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eleméhez létezik olyan X elem, melyre nézve

$$X \,\overline{\underline{\,i\,}}\, A_i \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Minden egyszeres rendjelleg teljes.

Valamely n-szeresen rendezett halmaz különböző vagy azonos n eleméből képezett komplexusok összesége ismét n-szeresen rendezett halmaz, ha megállapodunk abban, hogy az $\alpha \equiv (A_1, \ldots, A_n)$ és $\beta \equiv (B_1, \ldots, B_n)$ komplexusok azonosaknak tekintetnek, ha valamennyi i-re

$$A_i \,\overline{\underline{\,i\,}}\, B_i;$$

minden más esetben az α és β komplexusok között az

$$\alpha \; \begin{matrix} <i \\ \overline{\underline{\;i\;}} \\ i> \end{matrix} \; \beta$$

vonatkozások állanak fönn, a szerint, a mint

$$A_i \substack{<i \\ \overline{\underline{\;i\;}} \\ i>} B_i.$$

Az így definiált rendezett halmaz rendjellege teljes. A halmazt az *eredeti halmazhoz tartozó teljes halmaznak*, rendjellegét az ugyanahhoz tartozó teljes rendjellegnek nevezem. Az eredeti halmaz hasonlóan rendezett a hozzá tartozó teljes halmaz azon részhalmazával, melynek elemei azok a komplexusok, melyekre $A_1 \equiv A_2 \equiv \cdots \equiv A_n$. Minden rendjelleg ilyen módon a hozzá tartozó teljes rendjelleg részhalmazának tekinthető.

Az A elem szűkebb értelemben vett speciális környezetét *teljesnek* mondom, ha egyszersmind a rendjelleghez tartozó teljes rendjellegben is speciális környezete az A elemnek.

Valamely n-szeres rendjelleghez és minden i számhoz ($i=1,\dots,n$) egy-egy bizonyos egyszeres rendjelleg tartozik, úgy hogy az n-szeres jelleg minden A eleméhez az i-edik egyszeres rendjelleg egy A_i eleme tartozik és az i-edik rendjelleg A_i és B_i elemei közt az

$$A_i \lesseqgtr B_i$$

vonatkozások állanak fönn a szerint, a mint az n-szeres rendjellegben

$$A \substack{<i \\ \overline{\underline{\;i\;}} \\ i>} B.$$

Két az i-edik rendre nézve egyenrangú elemhez ugyanaz az elem tartozik. Az i-edik ilyen egyszeres rendjelleget az n-szeres rendjelleg i-edik *vetületének* nevezem.

A teljes rendjelleg a vetületeiből képezett komplex halmaznak tekinthető.

Az n-szeresen rendezett halmazokra a rendezés egy határozott sűrítési elvet szolgáltat. Az A elemet a t részhalmaz *sűrűsödési helyének* nevezem, ha minden speciális környezetében van a t halmaznak A-tól különböző eleme; ellenkező esetben az A elemről azt mondom, hogy a t halmazra nézve *izolált*. Közvetetlenül világos, hogy ez a sűrítési elv megfelel a mathematikai kontinuumokat illető négy feltételünknek.

A mathematikai kontinuumokra és részhalmazaikra definiált «összefüggés» és «abszolut összefüggés» fogalmakat fölösleges a rendjellegekre, mint a mathematikai kontinuumok speciális osztályára ujból definiálni. *Az összefüggő rendjelleg vetületei, valamint a hozzá tartozó teljes rendjelleg szintén összefüggők.* A tétel nem fordítható meg.

Azok közül a fogalmak közül, melyek még a rendjellegek elméletében fontosak, még a «*mindenütt sűrű* részhalmaz» fogalmára lesz szükségünk. A rendjelleg valamely részhalmazáról akkor mondom, hogy a rendjellegben mindenütt sűrű, ha a rendjelleg minden eleme vagy sűrűsödési helye a részhalmaznak.

Az egyszeres összefüggő rendjelleg egy részhalmaza eszerint a rendjellegben akkor mindenütt sűrű, ha a rendjelleg bármely két eleméhez van a részhalmaznak olyan eleme, mely az egyiket követi, a másikat megelőzi, vagy más szóval a két elem között van. *Ha az egyszeresen összefüggő rendjellegnek, melynek nincsen sem első, sem utolsó eleme, van egy megszámlálható mindenütt sűrű rézhalmaza, akkor a rendjelleg a nagyság szerint rendezett valós számok halmazának rendjellege.**

Az olyan összefüggő, n-szeres rendjelleget, melyben minden elemnek van abszolut összefüggő teljes környezete, *n-dimenziós tartománynak* nevezem. *Valamely m-dimenziós és valamely n-dimenziós tartománynak, hol m és n különböző számok, nem lehet közös sűrítési jellege.***

---

* G. CANTOR, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. Bd. 46. A tétel fogalmazása némileg módosíttatott.

** A tétel általánosítása a NETTO-féle tételnek, mely szerint az egyenes vonaldarab nem lehet a négyzetnek folytonos és megfordíthatóan egyértelmű képe.

Ha már most valamely mathematikai kontinuumhoz létezik olyan n-szeres rendjelleg, mely a kontinuumhoz hasonlóan sűrített, melynek sűrítési jellege ennélfogva azonos a kontinuum sűrítési jellegével, akkor azt mondom, hogy a mathematikai kontinuum *folytonosan n-szeresen rendezhető*, vagy röviden: *n-szeresen rendezhető*. A mathematikai kontinuumról azt mondom, hogy folytonosan n-szeresen rendezett, ha olykép van n-szeresen elrendezve, hogy az ezáltal definiált sűrítés a mathematikai kontinuum sűrítésével megegyezik. Röviden azt is mondom, hogy a mathematikai kontinuum n-szeresen rendezett.

Ha a mathematikai kontinuum A elemének van olyan környezete, mely mint önálló mathematikai kontinuum n-szeresen rendezhető, akkor azt mondom, hogy a mathematikai kontinuum *az A elem környezetében n-szeresen rendezhető*. Abból, hogy egy mathematikai kontinuum minden eleme környezetében n-szeresen rendezhető, még nem következik, hogy a mathematikai kontinuum a maga egészében is n-szeresen rendezhető. Példa: a körvonal, mint ponthalmaz.

A tér rendezése.

A tért először mint bizonyos fizikai kontinuumok megszámlálható sorozatát jellemeztem, melyeknek elemei egymással bizonyos vonatkozásokban voltak; a tér ezen első definicziója alapján megadtam egy mathematikai kontinuumot, melynek segítségével ama fizikai kontinuumok és vonatkozásaik leírhatók. Ezt a mathematikai kontinuumot ugyancsak térnek neveztem. Azokból a föltevésekből, melyeket a fizikai kontinuumok sorát illetőleg fölállitottam, a térnek, mint mathematikai kontinuumnak, több tulajdonságára következtettem. Mindezek a tulajdonságok azonban számos különböző sűrítési jellegnek tulajdonságai; mindenesetre a tetszés szerinti dimenziójú számtér minden abszolute összefüggő halmaza mindezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik; és viszont minden ilyen halmazhoz megadható a fizikai kontinuumok egy megszámlálható sora, mely föltevéseinknek megfelel, úgy, hogy a sorból származtatott mathematikai kontinuum az illető halmazzal hasonlóan sűritett. Föltevéseink ennélfogva semmiesetre sem határozzák meg egyértelműen a tér sűritési jellegét. Ha tehát ezt a sűrítési jelleget közelebbről akarjuk jellemezni, akkor a momentán térképzetek sorát illetőleg újabb föltevéseket kell megszabnunk.

A geometria olyan alapvetésénél, mely a folytonosság fogalmából, vagy a mi kifejezésmódunk szerint a mathematikai kontinuum fogalmából indul ki, a sík Hilbert-féle definícziójának mintájára a tért, mint olyan mathematikai kontinuumot definiáljuk, melynek elemei pontok és a melynek sűrítési jellege megegyezik a háromdimenziójú projektiv számtér egy csupán belső helyekből álló, közelebbről meg nem határozott tartományának sűrítési jellegével; vagyis a tért mint olyan összefüggő mathematikai kontinuumot jellemezzük, mely minden elemének környezetében háromszorosan rendezhető, még pedig úgy, hogy minden elemnek van olyan teljes környezete, melynek rendjellege ugyanaz, mint a háromdimenziójú közönséges számtéré. Ha az elliptikus geometriát eleve kizárjuk, akkor a tér a maga egészében is, mint háromszorosan rendezett halmaz fogható föl. Kérdés, hogy a fizikai kontinuumok sorát milyen további föltevéseknek kell alávetni, hogy a tér, mint a sor által definiált mathematikai kontinuum egészben, ill. pontjai környezetében háromszorosan rendezhető legyen és a föntebb részletezett tulajdonságokkal rendelkezzék. Közel fekszik, hogy a szükséges föltevéseket fizikai kontinuumjainknak rendezett halmazok gyanánt való fölfogása révén keressük.

Megfordítom ugyanis a kérdést és első sorban azt kérdezem: föltéve, hogy a tér mint mathematikai kontinuum n-szeresen rendezhető, mi következik ebből a föltevésből az egyes fizikai kontinuumokra? A tér egy bizonyos n-szeres elrendezése a fizikai kontinuumok mindegyikének egy n-szeres elrendezését határozza meg, ha megállapodom abban, hogy az a fizikai pontról akkor és csak akkor mondom, hogy ugyanazon fizikai kontinuum b pontját az i-edik rendben megelőzi, ha minden a-ban tartalmazott mathematikai pont minden b-ben tartalmazott mathematikai pontot az i-edik rendben megelőz. Ezáltal a fizikai kontinuumok, mindegyikének olyan n-szeres elrendezése van egyértelműen meghatározva, mely a rendezett fizikai kontinuumokat illető 1.—3. föltevéseknek okvetlen eleget tesz; abból a tételból, mely szerint megkülönböztethetetlen, fizikai pontok legalább egy közös mathematikai pontot tartalmaznak, következik, hogy az 4. föltevés is ki van elégítve.

Tekintetbe véve a fizikai kontinuumok sorát illető eddig föltevéseinket, következik, hogy az a föltevés, hogy a tér mint mathematikai kontinuum n-szeresen rendezhető, egyértékű azzal a föltevéssel, hogy a definiáló sor minden egyes fizikai kontinuumának lehetséges egy-egy meghatározott n-szeres elrendezése úgy, hogy az igy n-szeresen rendezett fizikai kontinuumok sora eleget tesz a következő két föltételnek:

1. Ha az a_m és b_m m-edrendű fizikai pontokra nézve $a_m <i\ b_m$, akkor az a_p és b_p p-edrendű fizikai pontokra nézve, melyek közül a_p a_m-ben, b_p b_m-ben tartalmaztatik, $a_p <i\ b_p$.

2. Az a_m és b_m m-edrendű fizikai pontokhoz, melyek egymástól megkülönböztethetők, mindig létezik olyan N szám, hogy minden olyan fizikai pont, mely a_m-ben és valamely valódi N-nél magasabb rendű fizikai pontban tartalmaztatik, minden olyan ugyanolyan rendű fizikai ponttól, mely b_m-ben és valamely valódi N-nél magasabb rendű fizikai pontban tartalmaztatik, legalább az egyik rendre megkülönböztethető.

Föltevésünk pszichológiai jelentése könnyen diszkutálható, ha tekintetbe veszszük azokat az elveket, melyek térképzeteinknek fizikai kontinuumok gyanánt való fölfogásakor irányadók. A kérdésnek evvel az oldalával nem foglalkozom. Fölteszem, hogy föltevésünk ki van elégítve és pedig $n = 3$; akkor a tér, mint mathematikai kontinuum háromszorosan rendezhető.

Eddigi föltevéseinkből még mindig nem következik, hogy a tér sűrítési jellege egy összefüggő, belső helyekből álló, 3 dimenziójú tartomány sűrítési jellegével azonos. Mindenesetre biztosítva van a tér összefüggő és a kitüntetett környezetek abszolut összefüggő volta, valamint a tér rendezhetősége is; nincs azonban kizárva, hogy a háromszoros elrendezésben a tér egy pontjának nincsen, sőt egy pontjának sincsen teljes környezete.

A Borel-féle tétel alkalmazásával könnyen következik, hogy az a követelés, hogy minden pontnak legyen teljes környezete, az eddigi föltevések után egyértelmű a következő követeléssel: Minden a_m fizikai ponthoz létezzék olyan N szám, hogy bármely három különböző vagy részben azonos egyenlő rendű fizikai ponthoz, a^1, a^2, a^3-hoz, melyek a_m-ben és ugyanazon valódi N-nél magasabb rendű fizikai pontban tartalmaztatnak, létezzék legalább egy velük egyenlő rendű a fizikai pont, mely a^1-tól az első, a^2-tól a második és a^3-tól a harmadik rendre nézve megkülönböztethetetlen.

Ezt a követelést sem diszkutálom pszikológiai szempontból; fölteszem, hogy ki van elégitve. Akkor végre biztosítottuk, hogy *a tér sűrítési jellege azonos egy háromdimenziójú, összefüggő, csupán belső pontokból álló tartomány sűrítési jellegével.*

A térképzeteinket illetőleg eddig megszabott föltevések most már elégségesek arra is, hogy egy lépéssel tovább menjünk és az említett tartományt még jobban körülírjuk. Tekintsük a tartomány vetületeit. Mind a három vetület egy-egy összefüggő, egyszeresen rendezett halmaz; a kitüntetett környezetek megfelelő vetületei a speciális környezetek egy-egy kielégítő rendszerét alkotják; minden elemnek van szűkebb értelemben vett környezete, tehát nincsen első és utolsó elem; végre a speciális környezetek kielégitő rendszerei megszámlálhatók. A környezetek határpontjai mind a három vetületben egy-egy megszámlálható részhalmazt alkotnak, melyek, minthogy a környezetek rendszerei kielégitők, az illető vetületekben mindenütt sűrűek. Az idézett Cantor-féle tétel értelmében tehát az egyes vetületek rendjellegei azonosak a valós számok nagyság szerint rendezett halmazának rendjellegével. A tartományunkhoz tartozó teljes rendjelleg ennélfogva azonos a három dimenziós közönséges számtér rendjellegével; a miből végre következik, hogy *a tér sűrítési jellege azonos valamely háromdimenziós számkontinuum sűrítési jellegével.*

Ha redukáljuk azokat a követeléseket, melyeket a térrel, mint a fizikai kontinuumok sorával szemben ezen kontinuumok rendezhetőségét illetőleg fölállítottunk és a háromszoros rendezhetőséget nem a fizikai kontinuumokra a maguk egészében, hanem csupán bizonyos részhalmazaikra posztuláljuk, miáltal a többi föltevés is megfelelően módosul, akkor odajutunk, hogy a tért mint olyan összefüggő mathematikai kontinuumot jellemezzük, melyben *minden pontnak van a háromdimenziós közönséges számtérhez hasonlóan sűrített környezete.* Ez pedig megfelel a sík HILBERT-féle általánosabb konczepcziójának.

A geometria alapvetése.

Azok a föltevések, melyeket térbeli képzeteink perczepcióját és vonatkozásait illetőleg fölállítottunk, odavezettek, hogy a tért mint mathematikai kontinuumot definiáljuk, melynek segítségével térbeli képzeteink leírhatók. A definiált mathematikai kontinuum sűrítési jellegét föltevéseink alapján közelebbről körülírtuk ugyan, de egyértelműen még mindig nincsen meghatározva. Föltevéseinknek a háromdimenziós közönséges, illetőleg projektiv számtér minden összefüggő, csupán belső helyekből álló tartományának sűrítési jellege megfelel. Ismeretes, hogy nem minden két ilyen tartomány homöomorf; a lehetséges sűrítési jellegek számossága $2^{\aleph_0}$. A tér eddig adott tulajdonságai eszerint semmiesetre sem képezhetik a föltevések egy teljes rendszerét, mely határozott geometriát definiálna. A geometria alapvetéséhez még további föltevések szükségesek.

Egy határozott sűrítési jelleg kiválasztása már egy kész geometriai rendszert, egy «analysis situst» határoz meg. Ebben a geometriában még az egymással homöomorf, azaz közös sűrítési jelleggel biró ponthalmazoknak ugyanaz a szerep jut. Minden más geometriai rendszerünkben már bizonyos ponthalmazok ki vannak még velük hasonlóan sűrített ponthalmazokkal szemben is tüntetve. *Az ilyen geometriai rendszerek alapvetéséhez nem elégséges a sűrítési jelleg megadása.* Új fogalmakra van szükség, melyek segítségével egyes részhalmazok mások fölött kitüntethetők.

Lie és Hilbert a további alapvetésnél a *mozgás* fogalmát alkalmazzák. A mozgások a térnek megfordíthatóan egyértelmű folytonos transzformácziói, vagyis a térnek olyan önmagán való megfordithatóan egyértelmű ábrázolásai, melyben az egymásnak megfelelő részhalmazok hasonlóan sűrítettek. Egy könnyen definiálható sűrítési elv alapján, mely a tér sűrítési jellegén alapszik, a mozgások sokasága mint mathematikai kontinuum fogható fel; ennek a mathematikai kontinuumnak jellemző tulajdonsága, hogy még az identikus transzformáczió kizárása után is összefüggő. A mozgások kontinuumát illetőleg fölállitott alkalmas axióma-rendszerek végre a parabolikus, hyperbolikus vagy elliptikus geometriához vezetnek.

Miképen keletkezik a mozgás fogalma? Mindenesetre mozgásképzetekből.* A mozgásképzetek ismét fizikai kontinuumok; a momentán mozgásképzetek megszámlálható sora hasonló módon határozza meg a mozgások mathematikai kontinuumát, mint a momentán térképzetek sora a tért. Alkalmas föltevések, melyek a momentán térképzetek és a momentán mozgásképzetek viszonyát szabályozzák, vezetnek arra az eredményre, hogy a mozgások kontinuuma és a tér bizonyos transzformáczióinak föntebb említett kontinuuma hasonlóan sűrítettek, vagyis folytonosan, megfordithatóan egyértelműen egymáshoz rendelhetők. Megszoktuk, hogy a mozgásokat a hozzájuk rendelt transzformácziókkal azonositsuk és magukat a transzformácziókat nevezzük mozgásoknak. A mozgások kontinuumának további tulajdonságait, melyek axiomákúl szolgálnak, ugyancsak a térképzetek és mozgásképzetek viszonyát szabályozó

* A mozgásképzetek pszikológiai magyarázatát illetőleg l. Poincaré, La valeur de la science, p. 99.

föltevésekből vezetjük le; ilyen tulajdonságok a kontinuum bizonyos értelemben vett zárt volta, csoportkaraktere, bizonyos alcsoportok tranzitiv volta, esetleg (parabolikus geometria esetében egy, hyperbolikus geometria esetében két) invariáns alcsoport létezése. A részletekre nem terjeszkedem ki.

Riemann* és Hamel** a geometria alapvetésére a *távolság* fogalmát használják föl; a távolság a mathematikai kontinuum elempárjainak folytonos függvénye. Minket ismét csak az a kérdés érdekel, hogy a momentán térképzetek sorának milyen tulajdonságai vezetnek a távolság fogalmára?

Térképzeteink perczepcziójánál fontos szerepet játszanak a távolságképzetek. Térképzeteinknek mint fizikai kontinuumoknak pontpárjait egyszerűen rendezzük, a mennyiben bármely két pontpárról vagy azt mondjuk, hogy az a és b pontok távolsága nagyobb a c és d pontok távolságánál, vagy hogy kisebb nála, vagy végre, hogy a két távolság megkülönböztethetetlen. A távolság a pontpárok folytonos függvénye, a mi azt jelenti, hogy ha az a és c, b és d pontpárok megkülönböztethetetlenek (beleszámitva két elem azonosságát is), az ab és cd távolságok is megkülönböztethetetlenek; az aa, bb, cc s. i. t. távolságok mind megkülönböztethetetlenek. Ebben a konczepczióban a távolságnak még nincsen csoportkaraktere. A távolságok kapcsolása, összeadása, vagyis a távolságok párjainak rendezése megadja a csoportkaraktert. Alkalmas föltevések a momentán térképzetek elempárjainak távolságát illetőleg vezetnek arra, hogy a térre, mint mathematikai kontinuumra definiáljuk a távolság fogalmát, azaz a tér pontpárjait is egyszeresen rendezzük; a megkülönböztethetetlen távolságú fizikai pontpároknak megfelelően itt bizonyos pontpárokat a rendezésben azonositunk, vagyis azt mondjuk, hogy a két pontpár távolsága egyenlő. A definiált távolságfogalomnak ismét cso-

* B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Ges. Werke 1876, p. 254.

** G. Hamel, Dissertation, Göttingen 1904.

portkaraktere van, abban az értelemben, hogy a távolságok összeadhatók.

Nem szándékom e helyütt a geometria alapvetésére irányuló egyes kisérletekkel foglalkozni. Csak megjegyzem, hogy föltevéseink nem szükségképen érvényes igazságok, csak indukczió útján vont következtetések, melyeknek legfőbb támasza a czélszerűség. Ugyanez a czélszerűség indokolja, hogy a praktikus geometriában egyetlen geometriai rendszerrel, az euklidesi geometriával, megelégszünk. Ha azonban föltevéseink nem szükségképeniek, akkor változtathatunk rajtuk, el is hagyhatunk belőlük, a nélkül hogy ellenkezésbe jönnénk a pszihikai életről való tapasztalatainkkal. Minő más geometriai rendszerekre jutunk ily módon? Bizonyos geometriai rendszerre vezető föltevések nem pótolhatók-e egyszerűebbekkel? Elhagyhatók-e bizonyos föltevések a nélkül, hogy a rendszer egyértelmű volta veszélyeztetnék? Szükséges-e például föltennünk, hogy a tudatunkban fölvett érzetek száma mindig véges? Nem helyettesíthető-e a tér rendezhetősége egyszerűbb, a mozgásokra vonatkozó föltevésekkel? Nem volna-e egyszerűbb eleve a rendezhetőségből kiindulni? Csupa olyan kérdés, melyekhez hasonlók axiomatikus vizsgálatokban már többször tárgyaltattak. Fontos és érdekes feladatnak tartanám annak a megvizsgálását, hogy mennyiben függenek egymástól az egyes föltevések, és ezzel az egyes föltevések horderejének megbecslését. A tapasztalati geometria axiomatikus tárgyalása csak ezáltal válnék tökéletessé.

Megjegyzem még, hogy a jelen dolgozatban tárgyalt problemával analog problema merül fel a természettudományok minden olyan ágának alapvetésénél, mely a jelenségek leírására folytonos mennyiségrendszereket használ.

Riesz Frigyes.

A GEODETIKUS VONALAK EGYENLETÉNEK EGY ÚJ ALAKJÁRÓL, SÍKRA LEFEJTHETŐ FELÜLETEK ESETÉN.

A geodetikus vonalak differencziálegyenlete isothermikus koordinátákban ($F=0$, $E=G$) így hangzik:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left[\frac{\partial \log E^{\frac{1}{2}}}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\partial \log E^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\right]=0.$$

Jelen sorokban e differencziálegyenlet integrálását quadraturákra vezetjük vissza abban az esetben, midőn a felület síkra lefejthető, azaz görbületének Gauss-féle mértéke zérussal egyenlő. Legyen

$$\log E^{\frac{1}{2}}=U_1,$$

akkor a differencziálegyenlet így írható:

$$d\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial U_1}{\partial x}dy-\frac{\partial U_1}{\partial y}dx=0. \qquad 1)$$

Mivel a görbület Gauss-féle mértéke zérus, a

$$\Delta U_1=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}=0$$

differencziálegyenlet teljesül. De ekkor az 1) differencziálegyenletben a két utolsó tag totál differencziált ad. A komplex változó függvényeinek tana szerint az U_1 potencziál-függvényhez meghatározható oly $U_2(x, y)$ függvény, mely a következő feltételeknek tesz eleget:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=\frac{\partial U_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}=-\frac{\partial U_2}{\partial x}.$$

Ezen egyenletek szerint az 1) egyenlet így írható:

$$d \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial U_2}{\partial x} dx + \frac{\partial U_2}{\partial y} dy = 0.$$

Tehát

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(-U_2+C),$$

a hol C tetszőleges állandót jelent.

Ennek az egyenletnek további integrálása végett írjuk ily alakban:

$$\sin(-U_2+C)\,dx - \cos(-U_2+C)\,dy = 0. \qquad 2)$$

Könnyű bebizonyítani, hogy a baloldali differencziálkifejezés teljes differencziál lesz, ha megszorozzuk $C^{U_1} = E^{\frac{1}{2}}$ függvénynyel. Így ismervén egy multiplicatort, a 2) differencziálegyenlet megoldása quadraturákkal eszközölhető.

E czélból tegyük:

$$U_1 + iU_2 = f(z)$$

és

$$z = x + iy.$$

Ha az C^{U_1} függvénynyel megszorzott 2) egyenletben a trigonometrikus függvényeket kitevős függvénynyel helyettesítjük, ez az egyenlet ily alakra hozható:

$$e^{f(z)}dz = e^{2iC} e^{f(\bar{z})} d\bar{z},$$

a hol

$$\bar{z} = x - iy,$$

és innen

$$\int e^{f(z)} dz = e^{2iC} \int e^{f(\bar{z})} d\bar{z} + \text{const.}$$

mint a geodetikus vonalak egyenlete adódik.

Király Henrik.

A KATHÓDSUGARAK MÁGNESI HATÁSA.

(Előzetes jelentés előterjesztve a M. és Ph. T. 1907 április 20-iki ülésén.)

A kathódsugarak jellemző tulajdonságai között első helyet foglal el azoknak a mágnes által való elhajlíthatósága. Ez volt már kezdetben az emissio-elméletnek leghathatósabb támasza, mert az elhajlítás iránya a mágnesi térben olyan, mint a kathódhoz erősített egyenes hajlékony vezetőé, melyben negativ elektromos áramlás van. Ezt összevetve Rowland, Himstedt kisérleteinek eredményével, hogy az elektromos töltésű gyorsan mozgó testek mágnesi teret keltenek, melynek erőssége a sebesség és a töltés nagyságával arányos, s azzal, hogy a kathódsugarak negativ töltést visznek magukkal, indokoltnak látszik a kathódsugarakat mozgó negativ elektromos töltések áramának tekinteni. Ebben az esetben természetesen első sorban maguknak a kathódsugaraknak a mágnesező hatását is ki kell mutatni, ez azonban mindeddig nem sikerült. Két erre vonatkozó kisérletről van tudomásom. Az elsőt Hertz Henrik[1] végezte, a másodikat v. Geitler;[2] mindkettőnek az eredménye negativ.

Hertz kisérleteinél 30 cm hosszú kathódcső fölé compensált mágnestűt helyezett; a cső egyik végében volt a köralakú kathódlemez, melyet középen át tört a tőle elszigetelt anoddrót. Ezzel a berendezéssel a kathódsugarakat keltő áramkörnek a mágnestűre való hatását akarta kiküszöbölni. Az eszköz

---

[1] Wiedemann Annalen 19. k. 789—816. l. 1883.

[2] W. A. 5. k. 924. l. 1901.

érzékenységére vonatkozólag Hertz azt a felvilágosítást adja, hogy a kathódcső összes árama, a mi körülbelül $\frac{1}{100}$ Daniell/Siemens, vagyis $\frac{1}{100}$ Ampèrnek felelt meg 30—40 osztályrész kiütést adott s még $\frac{1}{10}$ osztályrészt le tudott olvasni. Ebből következteti, hogy a kathódsugarak mágnesező hatása kisebb, mint az összes áram hatásának $\frac{1}{300}$-adrésze, vagyis mondhatjuk kisebb $\frac{1}{30000}$ Ampère-nél.

Hertz e negativ eredményt a kathódsugarakra vonatkozó felfogásának — hogy t. i. azok a fényhez hasonló hullámsugarak — támogatására magyarázta. Azt mondja, hogy a kathódsugaraknak a mágnesi térben való elhajlásából még egyáltalán nem következik az, hogy a visszahatásnak megfelelőleg a kathódsugaraknak is van hatásuk a mágnesre. Valószínűbbnek tartja, hogy a kathódsugarak elhajlása a mágnesi térben következménye e közeg mágnesezési változásának és azt kell mondani, hogy a kathódsugarak másképp terjednek a mágnesezett, mint a nem mágnesezett közegben. Az egyenes vezető elhajlásával való analogia — szerinte — valószínűleg csak felületes s a jelenség inkább a fénysugár polározás síkjának mágnesezett anyagokban való elforgatásához hasonlít.

Josef v. Geitler nem tartotta valószínűnek Hertz okoskodását és a negativ eredmény okát a kisérlet berendezésében kereste. Az ő felfogása szerint a kathódsugarak a cső falát negativ elektromossá teszik s ezek a negativ töltések a cső falán vissza az anód felé kisülnek. Ezeknek a visszafelé haladó negativ áramoknak a mágnesi hatása azután compensálja a kathódsugarakét; ezért nincs kifelé való hatás, akárcsak a bifilárisan kifeszített vezetődrótnál. Ebből folyólag a magnetométer tűjét a cső keresztmetszetének közepe tájára helyezte, hogy a symmetrikusan visszaáramló töltések hatását kiküszöbölje. Első kisérleteinek eredménye az volt, hogy a mágnestű erős kiütéseket mutatott még pedig oly irányban, mely a kathódsugárban áramló negativ elektromosság elektrodynamikus hatásának megfelelt. A v. Geitler magnetométer-tűjének lengésideje compensálással 1·7 mp volt, érzékenysége pedig csak akkora, hogy az alatta 1 cm távolban elhelyezett egyenes vezetőben 0·011 *A* áram 6 cm kiütést eredményezett a 130 cm távolságban levő scálán, a miből 1 mm kiütésnek körülbelül 0·00015 *A* felel meg.

A kathódsugár hatására nyert kiütések 3—17 cm között voltak, a mi átlag 0·01 *A* áramerősségnek felelt volna meg.

Hogy ez az eredmény nem lehet jó, azt az észlelt hatás nagyságrende is mutatja, de v. Geitler is rövidesen rájött a hibaforrásra és a rákövetkező évben[1] visszavonta az azokból levont következtetést, hogy a kathódsugaraknak mágnesező hatásuk lenne.

Kiderült ugyanis, hogy a magnetométer fémedénye alul más fémmel volt forrasztva s ott a ráeső kathódsugarak erős melegedést hoztak létre, melynek thermoelektromos hatása teljesen megfelelt az észlelt kiütéseknek. Így tehát végeredményben v. Geitler sem mutatta ki, hogy van-e mágnesező hatása a kathódsugaraknak. De az ő kisérleti berendezésénél, a használt magnetométer érzéketlensége folytán hatás nem is volt várható. Hiszen a kathódsugarak várható mágnesi hatásának rendjére már eleve következtetni lehet azok elektromos töltésére vonatkozó mérésekből.

A kathódcsőben a kathóddal szembe helyezett elektrodón — az antikathódon — elvezethető elektromos töltést galvanométerrel sokan mérték s azokból átlag 10^{-5} *A* rendűnek adódik az ki a kathódtól 10—12 cm távolságban. Természetesen ez a mennyiség sok tényezőtől függ, de főként minél távolabb van az antikathód s minél szűkebb a cső, annál kisebb a töltés. Ewers[2] észlelései például egy széles csőben 13 cm távolban a kathódtól 10^{-4} és 10^{-5} Coul/sec·ot adnak, de ez körülbelül a legnagyobb észlelt érték.

Ebből valószínű, hogy közönséges erősségű, keskenyebb kathódcsővel elérhető határok 1 mikroampère-nél nem nagyobbak, főként miután a cső hatásos részét a zavaró körülmények

---

[1] W. A. 7. k. 935. l. 1902.

[2] W. A. 69. k. 167. l. 1899.

miatt távolabb kell tenni a kathódtól, mint EWERS kisérleteiben az antikathod volt tőle.

HERTZ kisérleteinek negativ eredménye is érthető tehát, hisz nála $\frac{1}{10}$ osztályrész csak $4 \cdot 10^{-5}$ A volt, már pedig ilyen érzékenység mellett 0·1 osztályrész alig mutatható ki, még a legkedvezőbb viszonyok mellett sem, a Föld mágnességének ingadozásai miatt.

Ha tehát a közönséges erősségű kathódcsövekkel akarjuk azt eldönteni, hogy van-e a kathódsugaraknak mágnesező hatásuk, akkor olyan magnetométert kell használni, mely az 1—2 cm távolban elhelyezett egyenes vezetőben 10^{-6} A áramot megérez, vagyis mely a 10^{-6} c. g. s. térerősségváltozást megmutatja. Miután pedig ennek sem HERTZ, sem v. GEITLER eszközei nem feleltek meg, negativ eredményeik oka első sorban ebben is kereshető.

Ebből a szempontból indulva ki, megkisérlettem olyan magnetométert összeállitani, a mely ezzel az érzékenységgel bir s egyéb a kisérleti berendezésnél felmerülő feltételeknek is megfelel. Így a hőhatás és gyors mágnesi zavarok iránt való érzéketlenség szükséges. Az utóbbi különösen azért, mert az egyetemi physikai intézetnek abban a szobájában, melyben ez észleléseket tettem, sok vasgerenda van s a villamos vasutak és világitás áramváltozásai nagy mértékben érezhetők.

E czéloknak a legmegfelelőbbnek tartottam azt a berendezést, melyet br. EÖTVÖS LORÁND[1] használt mágnesi variácziós eszközeiben, t. i. a tengelyével függélyesen felfüggesztett mágnestűt. Hosszabb kisérletezés után sikerült ez alapon olyan magnetométert készitenem, mely a kivánt érzékenységű s a mellett a zavaró körülmények egyrésze kiküszöbölhető. Sajnos, a mágnesi zavarok hatását kellőképpen nem sikerült elhárítani s így a kisérletek csak arra szolgálnak, hogy a hatást kimutassák, de azok mérése végett vagy olyan helyen kellene végezni azokat, a hol e zavarok kisebbek, vagy ezeknek kiküszöbölésé-

[1] Math. és Természettud. Értesitő 14. k. 241. l. 1896.

ről még gondoskodni. Ez utóbbira vonatkozó kisérletek folyamatban vannak s remélem ezek alapján sikerül e zavaró hatásokat sokkal kisebbre szorítani.

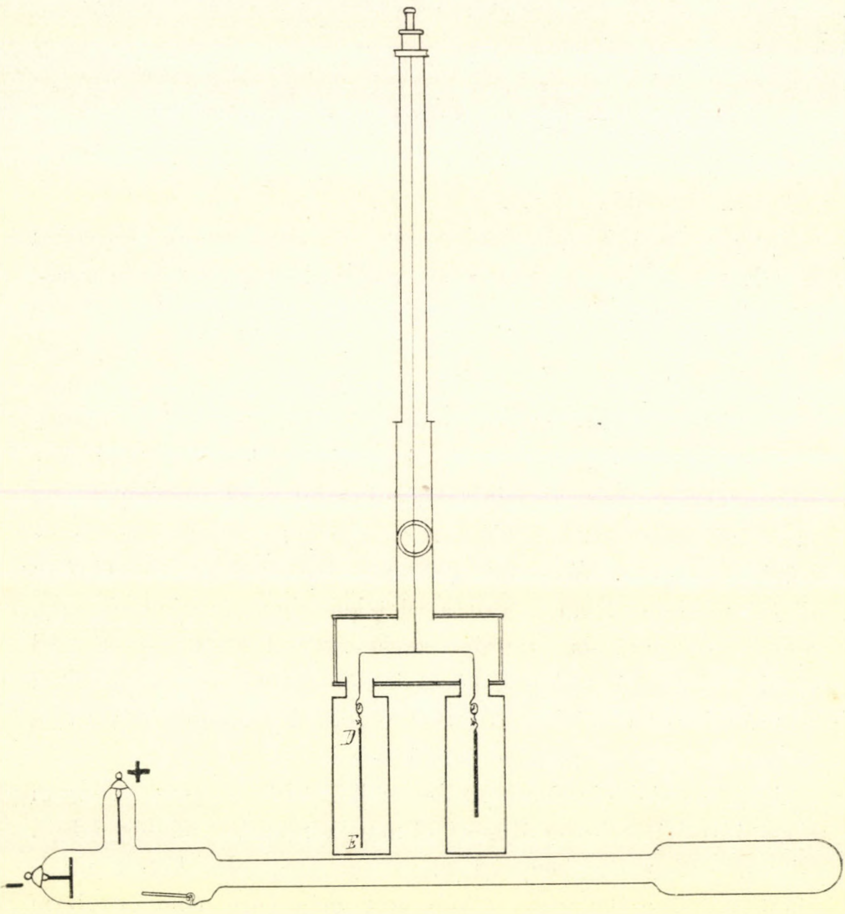
A kisérlet berendezése.

A kisérlet összeállításának vázlatát az 1. ábra mutatja. Mintegy 40 cm hosszú vékony quarczfonálon, melynek torsio-momentuma 0,0005 c. g. s., 6·5 cm hosszú vékony vörös rézdrótból készült rúd egyik végén lóg tengelyével függélyesen a 7 cm hosszú 0·65 gr súlyú mágnestű, mely kemény wolfram aczélból készült; mágnesi momentuma 42 s így a sark erőssége körülbelül 6·6. A rúd másik végén vörösréz ellensúly van s az egész forgó rendszer tehetetlenségi momentuma 14 c, g. s. Hogy ilyen könnyű és aránylag kis erősségű mágnesrendszert választottam, annak kettős oka volt. Először is a torsiomérleg érzékenysége, feltéve hogy a drót teherbirását kihasználjuk, annál nagyobb, minél kisebb a tömeg s ennek folytán a drót keresztmetszete; de másrészt azért is, mert a mennyiben a kathódnyalábban feltételezett mozgó részek igen kicsinyek és a nyaláb nem folytonos, a visszahatás a kisebb tömegű mágnesre nagyobb lehet, mert a mágnesi sark erőssége nem arányos a mágnes tömegével.

A mágnestű a rúd végén, csúcson, horgon és gyűrűn oly módon van felfüggesztve (1. ábra), hogy függélyes tengelye körül forgathatólag különböző helyzetekbe állítható. Ez azért szükséges, hogy a tű momentumának vízszintes componensét a meridiánba lehessen irányítani s az egyensúlyi helyzetbe a fonál csavarás nélkül legyen beállítható. Ez némi gyakorlattal könnyen sikerül, úgy hogy a magnetométer egyensúlyi helyzete ugyanaz, mintha a tű helyett megfelelő súlyú vörös rézdrót van felfüggesztve.

A mágnestű hosszát úgy választottam meg, hogy a 2 cm távolban alatta a meridiánban elhelyezett egyenes s közelítőleg végtelennek vett vezető hatása a legnagyobb legyen.

Miután ugyanis ennél a berendezésnél a két polusra való hatás különbsége működik mint forgató erő, ennek a vezető bizonyos távolságánál maximuma van.



1. ábra.

Feltéve, hogy az igen hosszú egyenes vezető a tűn átmenő függélyes mágnesi meridiánsíkban vízszintesen van elhelyezve a tűtől r távolságra s ha felteszszük, hogy a polusok a tű végeitől hosszának (l) $\frac{1}{12}$-edére vannak, akkor az erő

$$P=\frac{2i\mu}{r+\frac{l}{12}}-\frac{2i\mu}{r+\frac{11}{12}l}=\frac{\frac{5}{3}i\mu\,.\,l}{\left(r+\frac{l}{12}\right)\left(r+\frac{11}{12}l\right)},$$

a hol i az áram intensitása, μ a mágnesi sarkok erőssége. Ez az erő maximum, ha

$$r^2=\frac{11}{144}l^2 \text{ vagyis } l=\frac{12}{\sqrt{11}}\cdot r.$$

Ha $r=2$ cm, akkor $l=7{\cdot}2$ cm.

Hogy a tű a légáramlásoktól és a hősugárzástól lehetőleg meg legyen védve, a Kohl-féle gravitatiós eszköz felfüggesztését és szekrényét használtam fel azzal az átalakítással, hogy a lengő rudat tartalmazó rész mindenütt kettősfalú s gondosan vasmentes, úgyszintén a lelógó tűt elzáró hengeres edény is tiszta elektrolytikus rézből készült, oldalt alkotója mentén ezüsttel forrasztva, alul pedig kalapálva. Miután a négyszögletes szekrény alja aluminiumból készült s ez esetleg kevés vasat tartalmaz, a tűt hordó vörös rézkar megvan hajtva derékszögben és a tű úgy van felfüggesztve rá, hogy a szekrény aljától mintegy 2 cm-re van a tű felső vége. A négyszögletes rész külső üvegfala stanniolréteggel van bevonva és a rúd körül a fémtartó oszlopok körül is stanniollal van körülvéve; ez utóbbi a csillapodás fokozása végett. Ily módon sikerült a tű mozgását közel aperiodusossá tenni.

A tű lengésideje compensálás nélkül 85^s és $\frac{2}{100000}$ A áram 1 cm távolból 8·5 osztályrész (2 mm) kommutált kiütést adott. Miután ez az érzékenység még nem elegendő, két a meridiánban symmetrikusan elhelyezett mágnessel compensáltam a Föld mágnesi erő vízszintes összetevőjét. Az érzékenység természetesen a compensálás fokától függ; teljes compensálásnál 8 percz lengésidő mellett az 1 cm távolban levő igen hosszú vezetőben 10^{-7} A áram egy osztályrész kiütést adna. Ezt természetesen nem lehet elérni, már csak azért sem, mert a compensáló mágnesek kis rázkódása, hőmérséklet változása és főként a földmágnesség variatiói a mágnestű folytonos járását okoznák.

A compensáló mágnesekkel a lengésidőt körülbelül 7 perczre lehetett vinni s ekkor az érzékenység olyan, hogy a 190 cm távolban levő scálán körülbelül 140 osztályrész kommutált kiütést adott a 2.10^{-5} *A* erősségű áram. Ez tehát közel van a legnagyobb elérhető érzékenységhez és körülbelül 1000-szer akkora érzékenység, mint Hertz kisérleteinél. Csak az a baj, hogy a zavaró változások a hosszú lengésidő alatt erősen érvényesülhetnek s így ezek a kitérések nem mindég állapíthatók meg a kellő biztossággal. A nagy csillapítást éppen azért alkalmaztam, hogy a villamos vasutak nagy közelsége és az intézet eme helyiségében levő nagy vastömegek miatt fellépő erős mágnesi zavarok közül legalább a gyorsan történők hatása kiegyenlítődjék. Mindamellett ritkán lehetett elérni azt, még az éjjeli észleléseknél sem, hogy a tű nyugalomban maradjon, noha a közelben felállított más magnetométer, pl. a Kohlrausch-féle variométer ugyanakkor teljesen nyugodt maradt.

Az eszköz vezetőleg teljesen zárva volt s azután a földdel vezetőleg összekötve úgy, hogy belsejében elektromos erőhatások nem szerepelhettek. A Kohl-féle gravitatiós eszköz lábai vastartalmuknál fogva nem voltak használhatók, azért a szekrényt facsavarokkal állítható falábakra állítottam s ily módon minden az eszköztől származó mágnesi hatás ki volt küszöbölve.

A kathódcsövek 50 cm hosszú 14 mm széles egyenes csőrészből és ennek végein két tágasabb elektródedényből állottak, melyekben a kathódok tengelyei az egész cső tengelyével összeestek, az anódok pedig rá merőlegesen a kathódtól mintegy 4 cm távolban voltak elhelyezve. Nem választottam az anódnak Hertz-féle elhelyezését, hogy a kathódsugarak hosszabb úton legyenek a keltő elektromos tér mozgató hatásának alávetve s így nagyobb sebességű kathódsugarak keletkezzenek. A cső ezen részének elenyésző csekély mágnesi hatása van úgy is, ha azt elég távol helyezzük a mágnestűtől. Kisérleteimben a kathód rendesen 20—30 cm távolban volt a tűtől s azonkívűl a cső úgy volt elhelyezve, hogy az anód és kathód tengelyeinek és a hozzávezető drótoknak síkja is vízszintes volt, a mikor az egész rendszer elektromágnesi hatásának a forgás irányába eső componense majdnem semmi, mint arról kisérletek által is meggyőződtem.

A cső középső egyenes részét azért szűkítettem meg, hogy közelebb vihessem a tűhöz, ennek folytán azonban a kathódnyaláb gyengébb s a szűkület helyén a kathódsugarak erős melegedést hoznak létre. További kisérleteknél mindenesetre megkisértem egyenlő vastagságú csővel is dolgozni, miután a távolság növekedését bőven kárpótolhatja, sőt felülmulhatja a kathódnyaláb keresztmetszetének növekedése.

Annak ellenőrzésére, hogy a symmetrikusan elhelyezett kathódok folytán esetleg nem származik-e áramelágazás a nem működő kathód felé, olyan csövet is készítettem, melyben csak az egyik végen volt elektródedény, a másik vég pedig tágasabb üres edényben végződött.

Ebben a csőben a szűkület helyén a kathódsugarak útjába csillámajtót is alkalmaztam, melynek zárása és nyitása által a kathódnyalábot az egyenes részbe bevezetni vagy abból kizárni lehetett. (1. ábra.)

A szűkület helyén keletkező melegedés hatásának kiküszöbölésére még kívül a szűkület helyén a cső tengelyére merőlegesen stanniollal bevont 20 cm átmérőjű ernyőt tettem, mely a hősugárzás hatását megszüntette.

A hőhatás kiküszöbölésére különös gondot fordítottam, miután első kisérleteiben annak káros befolyása nagyon feltünő volt. Az itt leírt eszköz azonban a hőhatások iránt annyira érzéketlen, hogy a 10 cm távolságban elhelyezett égő gyertya sugárzását alig érezte meg, csakis akkor adott erős kiütést, ha egészen a hengeres edény alatt volt. De ezt a kiütést úgy rendeztem be, hogy az ellentett irányú a kathódsugarak várható mágnesi hatásával. Ez utóbbinak az adott elhelyezésnél a scálán a növekedő számok felé kellett kiütést adni, míg a melegítés hatása a kisebbedő számok felé vitte a tűt. Ezt azzal lehetett elérni, hogy a felfüggesztett tűt ennek megfelelő sarkaival helyeztem el és pedig ennél a berendezésnél úgy, hogy alul volt az északi sark.

Az egész kathódcső a tű alatt tengelyével a mágnesi meridiánba volt irányítva, hogy a várható forgási momentum a legnagyobb legyen.

A kathódcső táplálásara 20 lemezes influentia-gépet használtam sűrítő nélkül s a vezetékekben is gondosan elkerülve a szikraközöket, hogy oscillatiók ne keletkezzenek. A csőben fellépő potentiálkülönbséget néhányszor parallel kapcsolt szikraköz segélyével mértem meg.

Az észlelések eredményei.

Az eszköz eredetileg állandó kiütések megfigyelésére készült, erre szolgáltak a symmetrikus csövek a kommutálás és esetleg multiplikatió végett; miután azonban az észlelések közben kiderült, hogy az adott helyi viszonyok folytán állandó kiütést észlelni alig lehet, kénytelen voltam megelégedni a tű járása közben való hatások megfigyelésésvel is, úgy hogy az eszközt bizonyos fokig ballistikus módon használtam.

Az eljárás az, hogy miután hatás a nagyobbodó számok felé volt várható, a tűnek a kisebbedő számok felé kilengést adtam és e közben, ha a mozgás sebessége nem volt túlságos nagy, egyenlő 1—2 perczes időközökben járatva a gépet, a kathódsugarak hatásának tettem ki a magnetométert. Ilyenkor, ha a tü sebessége megfelelő kicsi volt, a kathódnyaláb hatására megfordult a mozgás iránya, ha pedig nem, úgy a sebessége csökkent e közben s megszüntetve a hatást ismét visszafordult a kisebbedő számok felé vagy megfelelőleg növekedett a sebessége.

Természetesen ez nem mindég következett be, mert előfordult, hogy közben a tű külső zavarok folytán egyirányú lökést kapott, mely azután teljesen elfödte a kathódsugár hatását.

Mégis az észlelések tulnyomó nagy számában mindég szabályosan bekövetkezett a kathódsugarak hatása.

Néhány észlelés számadatát akarom csak erre vonatkozólag közölni, a többiek jó részének graphikonját a mellékelt táblán látjuk, ezek a legvilágosabban mutatják a hatást. (2. ábra.)

Szépen mutatja a kathódsugarak hatását a következő éjjeli észlelési sorozat (1906 decz. 15), melynél a symmetrikus csövet használtam s a kommutálás eredménye is feltünően nyilvánul. A cső igen kemény volt, úgy hogy a kathódnyaláb akadozott. A nyíl jelzi a kathódcső bekapcsolásának időpontját és az irányt, melyben a kathódsugár, a távcső felől nézve, haladt. Balról jobbra haladó nyílnak a nagyobb számok felé való kiütés felel meg. A kathód a Földbe volt levezetve, más kisérleteknél az anód, de ez nem változtatott az eredményen.

0^s	219·6		8·5	222·0	
0·5	219·6		9	221·4	
1	219·5		9·5	221·0	
1·5	219·3		10	221·0	→
2	219·2		10·5	221·1	
2·5	219·1		11	222·0	
3	219·0		11·5	223·1	
3·5	218·7		12	224·5	←
4	218·3	→ bekapcsolva	12·5	225·7	
4·5	218·2		13	226·3	
5	218·8		13·5	226·7	
5·5	219·4		14	226·9	
6	220·0		14·5	227·1	megszüntetve
6·5	221·0		15	227·7	
7	222·0	← kommutálva	15·5	228·8	
7·5	222·7		16	229·7	
8	222·4				

Ugyanaz éjjeli észlelés eredménye még a következő sorozat is ugyanazzal a nagyon kemény csővel kommutálás nélkül, kathód a Földbe vezetve.

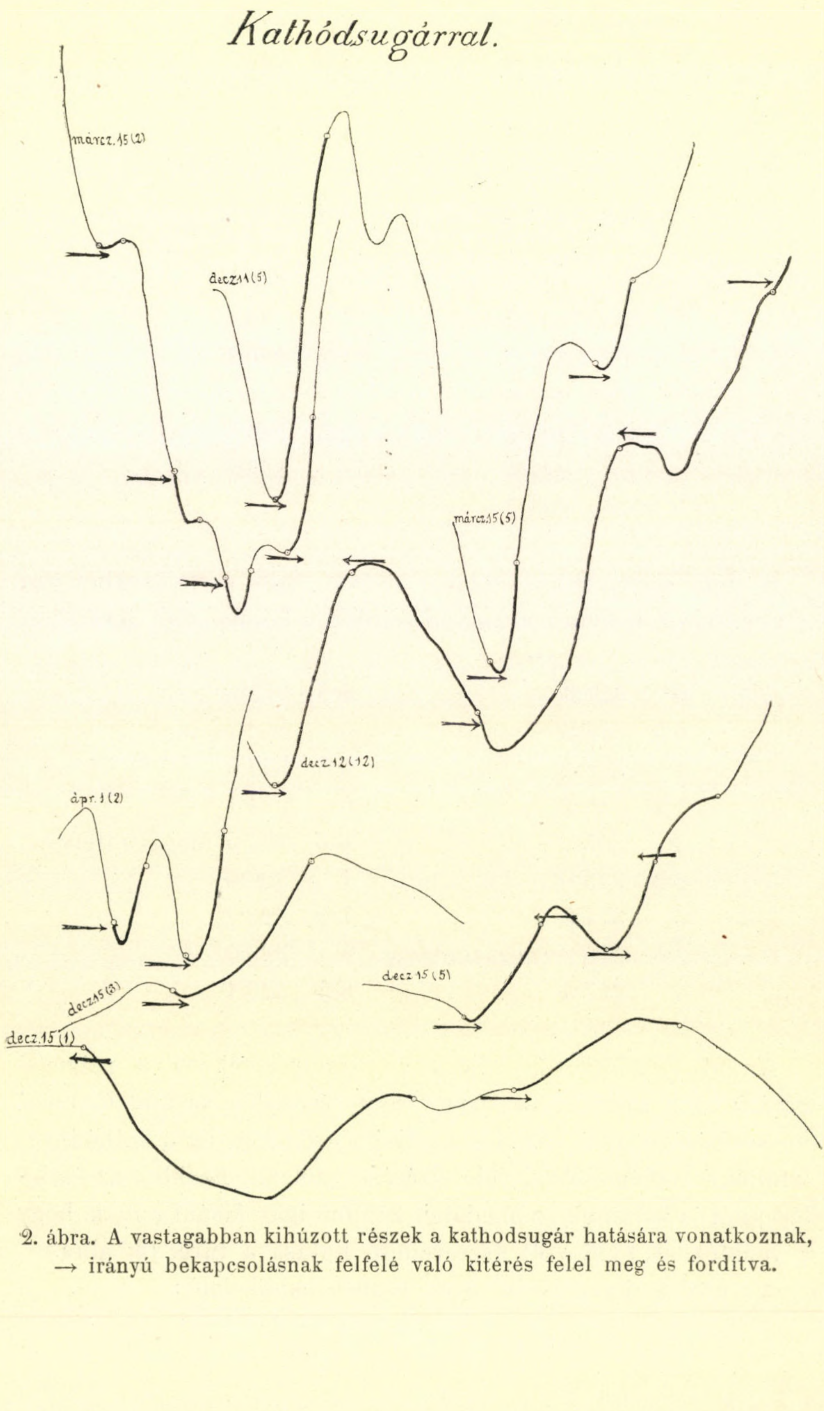
0ˢ	220·0	7	222·1	
0·5	220·1	7·5	222·5	
1	220·4	8	223·0	
1·5	220·6	8·5	223·9	
2	221·0	9	224·8	
2·5	221·5	9·5	225·6	
3	221·7	10	226·5	megszüntetve
3·5	221·5	10·5	226·8	
4	221·3 →	11	226·7	
4·5	221·0	11·5	226·4	
5	221·0	12	226·2	
5·5	221·2	12·5	226·0	
6	221·5	13	225·8	s í. t.
6·5	221·7			

A nem symmetrikus ablakos csővel való észlelésekből van a következő, melynél a kathód szintén a Földbe volt levezetve.

0ˢ	317·4	4·5	315·9	
0·5	318·0	5	312·7 →	
1	318·2	5·5	312·5	
1·5	318·2	6	314·1	
2	315·2 →	6·5	317·7	megszüntetve
2·2	313·0	7	320·0	
3	314·5	7·5	323·2	
3·5	316·3 megszüntetve	8	326·0	
4	317·4	8·5	329·1	

Annak ellenőrzésére, hogy az áramvezetéknek a mágnesi hatása nem zavaró-e, a symmetrikus csőnél a kathód és anód felcserélésével való észlelés, az újabb csőnél pedig a kathódnyalábnak a csillámajtóval való elzárása szolgált. Ezekből az észlelésekből is kettőnek számadatait közlöm igazolásául annak, hogy a vezetéknek nem volt észrevehető hatása a tűre. (3. ábra.)

Az első a decz. 15-iki éjjeli észlelésekből való:



2. ábra. A vastagabban kihúzott részek a kathodsugár hatására vonatkoznak, → irányú bekapcsolásnak felfelé való kitérés felel meg és fordítva.

0^s	232·4		4·5	231·4	
0·5	232·3		5	231·0	
1	232·4		5·5	230·5	
1·5	232·5	bekapcsolva	6	230·0	megszüntetve
2	232·5		6·5	229·4	
2·5	232·4		7	—	
3	232·3		7·5	228·0	
3·5	231·9		8	226·6	
4	231‘6		8·5	225·7	

A második (ápr. 3) a bezárt ajtós csővel a következő:

0^s	202·5		4·5	227·5	
0·5	209·8		5	229·7	
1	215·0		5·5	230·2	→ bekapcsolva
1·5	279·6		6	—	
2	221·8		6·5	232·2	megszüntetve
2·5	222·4	→ bekapcsolva	7	232·6	
3	—		7·5	232·6	
3·5	225·2	megszüntetve	8	233·7	
4	225·6				

Felmerülhet az a kérdés is, hogy mégis nem-e a kathódsugarak hőhatása szerepel itt, vagy hogy nincs-e a kathódsugaraknak transversalis hatásuk. Azért ellenőrzésképpen elhelyeztem a kathódcsövet a mágnestű alatt a meridiánra merőleges helyzetben; ekkor azonban a tű járására semmi észrevehető hatást nem gyakoroltak a kathódsugarak.

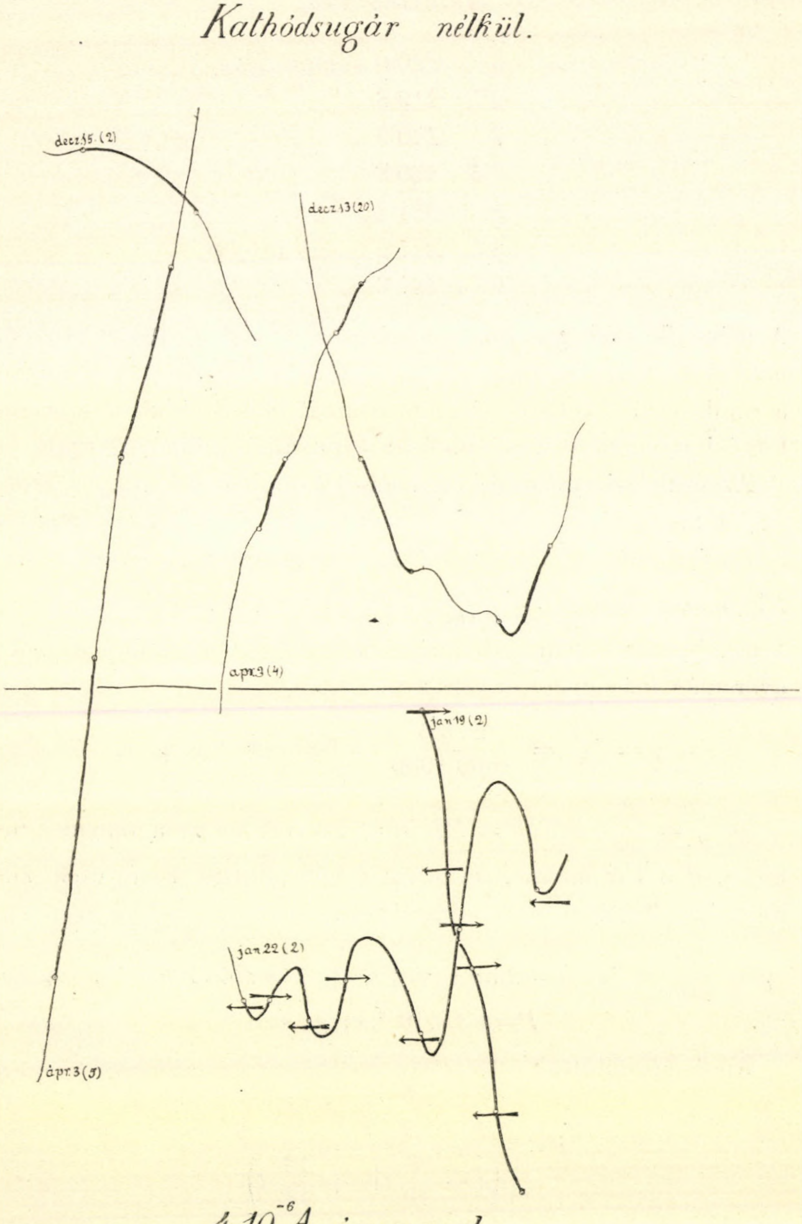
E számsorozatok, de különösen az észlelések graphikonjai, úgy vélem, meggyőzőleg igazolják, hogy a kathódsugarak hatása a zavaró körülmények daczára biztosan kimutatható. A hosszadalmas és fáradságos észlelésekben és azok feldolgozásában — így a mellékelt rajzok elkészítésében is — nagy segítségemre volt Selényi Pál tanárjelölt úr, a kinek buzgóságáért őszinte köszönettel tartozom.

Méréseimből világosan következik, hogy a kathódnyalábnak van mágnesi hatása és pedig a nyaláb mentén a kathódtól elirányított negativ áram hatásának megfelelő irányban. A mi e hatás nagyságát illeti azt az adott helyi viszonyok folytán, melyek a tű állandósitását egyelőre lehetetlenné tették, pontosan megmérni nem lehetett. Erre a czélra a méréseket olyan helyen kellene végezni, a hol a sok mindenfelé villamos áram zavaró hatása hiányzik. Miután azonban erre nem sok kilátásom lehet itt Budapesten, azért, mint már említettem, jelenleg oly módszer kidolgozásával foglalkozom, mely e zavaró hatások befolyásának tetemes csökkentését lehetővé teszi. Az eddigi mérésekből is meglehet azonban határozni a hatás rendjét s megállapitani, hogy az olyan-e, mint a minőnek azt eddigi ismereteink szerint becsülhetjük.

Erre két mód van. Az egyik az, hogy a tű alatt a cső helyére egyenes vezetőt téve, meghatározzuk, hogy mekkora erősségű áram hozza közel ugyanazt a hatást létre, mint a kathodnyaláb átlagos hatása. Ennek a kisérletnek az eredménye az, hogy körülbelül $4 \cdot 10^{-6} A$ áram egyenlő hatású a kathódnyalábbal; mint azt a kövctkező észlelési adatok és a megfelelő graphikon mutatják. (3. ábra.)

$4 \times 10^{-6} A$ árammal kommutálva, a következő észlelési sorozatot kaptam:

0^s	222·2	
0·5	222·8	
1	222·7	bekapcsolva a kis számok felé
1·5	221·6	
2	221·2	kommutálva
2·5	220·6	
3	221·0	
3·5	221·7	
4	223·0	
4·5	224·6	kommutálva
5	225·2	
5·5	223·0	



3. ábra. A nyilak az áram irányát jelentik s így → a lefelé való kiütésnek felel meg.

6	220·0	kommutálva
6·5	219·8	
7	220·9	
7·5	220·8	
8	221·3	
8·5	221·2	megszüntetve
9	221·6	

A második mód az, hogy megbecsüljük azt a szöggyorsulást, melyet a kathódnyaláb a tű mozgásában létesített s ismerve a rendszer tehetetlenségi momentumát, kiszámítjuk a működő forgási momentumot s ebből az æquivalens áramerősséget.

Az észlelési adatokból és a graphikonokból az átlagos gyorsulást meghatározhatjuk. Egy percz alatt a scálán az átlagos sebességváltozás 3·6 osztályrésznek felel meg, az ennek megfelelő szögváltozást $= \frac{3·6}{1900}$, mert 1900 mm. a scálatávolság és 1 osztályrész 2 mm. Állandó erőt tételezve fel, ebből a szöggyorsulás másodperczenként:

$$\gamma = \frac{2\beta}{t^2} = \frac{2 \,.\, 3·6}{3600·1900} = 105 \times 10^{-8} \text{ c. g. s.}$$

De $\gamma = \frac{F}{K}$, hol $F = Pd$, $K = 2m \,.\, d^2$, ha m a mágnes tömege, d a kar hossza, P pedig a két pólusra ható erők különbsége. Tehát

$$\gamma = \frac{F}{2md} \quad \text{és} \quad P = 2md \,.\, \gamma = 2 \times 0·65 \times 3·25 \times 105 . 10^{-8}, \text{ vagyis}$$

$$P = 4·3 \times 10^{-8} \text{ c. g. s.}$$

Ámde közelítőleg:

$$P = \frac{\frac{5}{3} \,.\, i\mu \,.\, l}{\left(r + \frac{l}{12}\right)\left(r + \frac{11}{12}\, l\right)}$$

ebből

$$i = \frac{3P\left(r + \frac{l}{12}\right)\left(r + \frac{11}{12}\, l\right)}{5 \,.\, \mu l}.$$

A mágnessark erőssége közelitőleg 6·6, $r = 1$ cm. továbbá $l = 7$ cm. s igy $i = 6 \cdot 10^{-7}$ c. g. s. $= 6 \times 10^{-6}$ *Ampère*. Ez a calibrálásnál nyert $4 \times 10^{-6} A$ értékkel a lehetőség szerint egyezik.

A kisérletek mindkét feldolgozása tehát egyenlő rendű eredményhez vezet, és pedig olyanhoz, mely teljesen megfelel a más kisérletek alapján számitott értéknek; *úgy hogy e kisérletet eredményeképpen kimondhatom, hogy a kathódsugaraknak van mágnesi hatásuk, melynek nagyságrendje olyan, az elektromágnesi alaptörvénynek megfelelően, mint a kathódnyaláb mentén haladó negativ áramnak.*

A mágnesi hatás pontos méréséről egyelőre még nem szólhatok, hogy ez lehetséges legyen, egyrészt a magnetometert kell állandósitani, másrészt a csőben keletkező kathód-nyaláb erősségét növelni. Arra gondoltam, hogy az utóbbi czélnak megfelelnek a WEHNELT-től* melegitett oxykathódokon keletkező kis sebességű kathódsugarak, a melyek WEHNELT előzetes mérései szerint 10^{-3}—10^{-4} Coulomb/sec elektromos töltéseket visznek magukkal — tehát majdnem az összes árammennyiséget, míg a rendes sebesebb kathódsugarak, EWERS szerint mintegy 16%-át viszik át az összes áramnak. Nem kis fáradsággal készitettem ilyen Wehnelt-kathód-csövet s a kathódot a mágnesező hatás elkerülése végett váltakozó árammal melegitve, 7—900 Voltos szép kathód-nyalábot kaptam. Legnagyobb meglepetésemre azonban e csövek semmi mágnesi hatást nem mutattak, a mi talán összefüggésben van e kathódsugarak kis sebességével. Ez annyival valószinűbbnek látszik, mert áttekintve az észlelési adatokat azt vettem észre, hogy azokban az esetekben, mikor a kathód-nyaláb biztos és erős mágnesi kitérítést adott, a csövek kemények voltak, az előállitott sugarak körülbelül 20,000 Voltosak; a mikor pedig a kisérletek bizonytalanok, a csövek puhák voltak.

Ez összefüggés magyarázatában ez esetben v. GEITLER meg-

---

* WEHNELT DRUDE A. 14. k. 460. l. 1904.

jegyzése is szerepet játszana; mert lehetséges, hogy a Wehnelt-csőben a közeg jobb vezető, mondjuk sok ion van, s akkor csakugyan lehetséges, hogy a cső falainak negativ töltése az anód felé és minden írányban kiegyenlítődve, a kathódsugár hatását ellensúlyozzák. Ez annyival inkább lehetséges, mert a kis sebességű sugarak nagyobb elnyeletésük folytán erősebben vezetővé teszik a közeget s így erősebb ionisatorok.

Hogy ez a magyarázat mennyiben felel meg a tényeknek, ezt csak a további vizsgálatok fogják megmutatni, valamint ezzel összefüggőleg annak a kérdésnek a vizsgálata is csak ezután következik, hogy a kathódsugarak által magukkal vitt elektromos töltések hová jutnak s milyen hatásokat hoznak létre.

Egyelőre annak a megállapítására kell szorítkoznom, *hogy a kathódsugaraknak van mágnesi hatásuk, mely az egyenes negativ áramvezető hatásának felel meg.*

Klupathy Jenő.

A FELÜLETI FESZÜLTSÉG SZENKÉNEG ÉS VIZES OLDATOK KÖZÖS HATÁRFELÜLETÉN.

A két folyadék közös határfelületére vonatkozó elméleti kapillaritási tanulmányok Laplace, Poisson és Gauss alapvető elméleteivel analog principiumokon nyugosznak. Gauss elméletét MOUTIER[1] és PADOVA[2] terjesztették ki általában több egymással érintkező folyadék esetére. Poisson és Laplace theoriájával BEDE,[3] DUCLAUX,[4] illetőleg VOLKMANN[5] vizsgálták két folyadék határfelületét. VAN DER MENSBRUGGHE[6]-nak van számos ilynemű kérdésekkel foglalkozó tanulmánya.

A kapillaritási fundamentáltétel levezetése keresztülvihető egyszerűen abban a feltevésben, hogy a külömböző folyadékok részecskéinek egymásra gyakorolt hatása épen olyan alakú függvénye a molekulák tömegének és távolságának, mint egynemű folyadékok esetén. E mellett a feltevés mellett — a mit ugyan RAYLEIGH[7] nem tart eléggé indokoltnak, sőt ebben keresi az elmélet és a Quincke kisérleteivel nyert eredmények eltérésének okát — a szabad folyadékfelülettel teljesen analog kifejezést nyerünk itt is a kapilláris nyomás számára t. i.

$$P_{12} = K_{12} \pm \frac{H_{12}}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \qquad \text{I.},$$

[1] For. d. Phys. 1874—30. p.
[2] For. d. Phys. 1892. 42. p. 356.
[3] For. d. Phys. 1862. p. 65.
[4] Beibl. 26. 1876. p. 173.
[5] Wied. Ann. 16. 1882. p. 321.
[6] For. d. Phys. 28. p. 177, 43. p. 449, Beibl. 10. p. 754, 11. p. 413, 15. p. 3335 stb.
[7] Exn. Rep. d. Phys. 20. 1884. p. 91.

a hol P_{12} a két folyadék érintkezési rétegének egy tetszőleges pontjában a felületegységre vonatkoztatott normális nyomóerő, R, R_1 a felület főgörbületi sugarai ebben a pontban, K_{12} és H_{12} pedig a két folyadék természetétől függő konstansok. Állítsuk úgy a térbeli derékszögű koordinátarendszert, hogy annak (xy) síkja összeessék a határfelület horizontális síkjával, a z tengely pedig a nehézség irányával ellentett irányba állíttassék, a főgörbületi sugarak irányát tekintsük pozitivoknak konkav, negativoknak konvex meniskus esetén, akkor a hydrostatika azon tételének alkalmazásával, hogy egy folyadék belsejében fekvő horizontális síkban a nyomás mindenütt egyenlő, nyerjük I.-ből ezt az egyenletet:

$$\frac{2(z_1 - z_2)}{a_{12}^2} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) - \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'_1}\right) \qquad \text{II.},$$

a hol $(z_1 - z_2)$ a közös kapilláris felület két pontjának vertikális távolsága, R, R_1 és R', R'_1 a főgörbületi sugarak ezekben a pontokban, $a_{12}^2 = \frac{H_{12}}{s_2 - s_1}$, a hol $s_2 > s_1$ az alsó illetve felső folyadék fajsúlya, a_{12}^2 tehát a két folyadék természetétől függő mindig pozitivus konstans, az ú. n. specifikus koházió.

Legyen még $\frac{H_{12}}{2} = \alpha_{12}$, azaz

$$\alpha_{12} = a_{12}^2 \cdot \frac{s_2 - s_1}{2}.$$

α_{12} neve felületi feszültség.

Ennek a tanulmánynak a czélja a felületi feszültség meghatározása vízzel telített szénkéneg és szénkéneggel telített külömböző vizes oldatok közös határfelületében.

*

II. egyenletünkből kitetszőleg a kisérleti berendezés legtöbbször csekély módosításával a felületi feszültség mérésére szabad folyadékfelületek esetén használt módszerek legnagyobbrészt itt is alkalmazhatók. Ezek a módszerek két főcsoportra oszthatók a szerint, a mint a partszög ismeretétől függenek, vagy attól függetlenek. A partszög ismeretét megkivánó módszerek épen a partszög meghatározásában rejlő sokszor tapasztalt bizonytalanságok miatt pontos mérésekre nehezen alkalmazhatók. Egymással érintkező folyadékok partszögének elméletét FUCHS [1] tárgyalja. Theoretikusan nyert eredményeiből, valamint QUINCKE [2] indirekt keresztülvitt méréseiből azt következtethetjük, hogy a partszög két folyadék esetében is legtöbbször külömböző 0° ill. 180°-tól. Épen ezért kisérleti tanulmányomhoz azon módszerek közül volt czélszerű választani, melyek a partszög ismeretétől függetlenek. Ilyenek a QUINCKE [3] által alkalmazott lapos cseppek és buborékok módszere, GRUNMACH [4] hullámmódszere, MAGIE [5] ophtalmometrikus módszere, EÖTVÖS báró [6] reflexiós módszere. Ez utóbbi felelt meg legjobban czéljaimnak részint a mérés anyagát, részint egyszerűbb kisérleti berendezését illetőleg.

Ha II. röviden leszármaztatott egyenletünkből kiindulunk és Eötvös bárónak a folyadékok szabad felületét megillető elméleti okoskodásait nyomon követjük — abban a feltevésben, hogy a folyadékokkal érintkező sík lapot ∞-nek, tehát a folyadékok határfelületét hengerfelületnek tekintjük itt is — nyerjük a felületi feszültség számára a következő egyenletet:

$$\alpha_{12} = \left(\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{1-\cos\varphi_2} - \sqrt{1-\cos\varphi_1}}\right)^2 \cdot \frac{s_2 - s_1}{2} \qquad \text{III.},$$

a hol $(z_1 - z_2)$ a közös kapilláris határfelület két tetszőleges pontjának vertikális távolsága, φ_1 és φ_2 pedig a kapilláris felület ugyanazon pontjaiban húzott érintőknek a vízszintessel alkotott szöge.

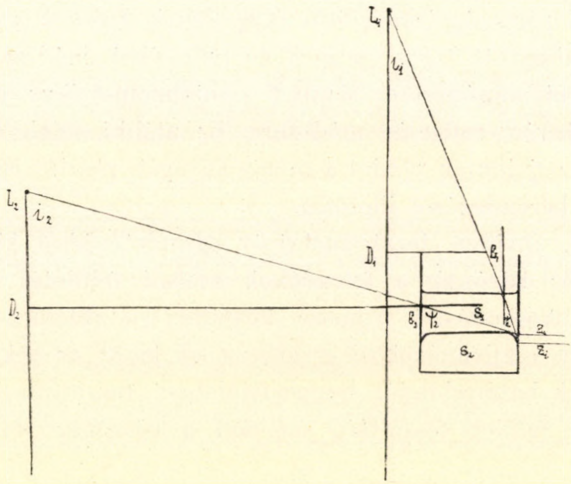
Ha a kapilláris felületre eső két fénysugár irányának a

[1] Wied. Ann. 29. p. 140—152.
[2] Pogg. Ann. 139. 1870. p. 1—89.
[3] Pogg. Ann. 139. i. h.
[4] Phys. Zs. 4. p. 25. két folyadékra Watson Beibl. 26. 1902. p. 651.
[5] Wied. Ann. 25. p. 421—438.
[6] Műegyetemi Lapok. 1. 1876. p. 1—10. és Wied. Ann. 1886. p. 448.

függőlegessel alkotott szögét ψ_1 illetőleg ψ_2 jelölik, akkor egyszerű geometriai szemlélet mutatja (Eötvös bárónál),[1] hogy a visszaverődés törvénye alapján:

$$\varphi_1 = 45^\circ - \frac{\psi_1}{2} \quad \text{és} \quad \varphi_2 = 45^\circ - \frac{\psi_2}{2}.$$

Kisérleti berendezésemben egy talpcsavarokkal ellátott asztalkára állított négyszögletes (100 mm. hosszú, 55 mm. széles) üvegedény szolgált a folyadékok befogadására. Így az üveg-



edény szélein lehajló határfelület hengerfelületnek tekinthető. Fényforrás gyanánt két egymással és az üvegedény hátulsó vertikális lapjával párhuzamosan állított elektromos lámpát — egyenes vonalú vízszintes izzó fonállal — alkalmaztam. Az első lámpa az üvegedény hátulsó lapjához aránylag közel (kb. 120 mm.) és magasan (kb. 980 mm.), a második lámpa ellenkezőleg aránylag távol (1590 mm.) és az első lámpához képest alacsonyan (600 mm.) áll.

A fényforrások ilyen elhelyezése mellett az első lámpából (L_1) kiinduló fénysugarak az üvegedény nyitott felső szélén át

[1] Műegyetemi Lapok i. h.

előbb a felső folyadékba jutnak és megtöretve érkeznek a közös határfelülethez, a honnan a fénysugarak beesési szögétől és a kapilláris felület hajlásától függő külömböző irányokba veretnek vissza. A második (L_2) lámpából jövő fénysugarak pedig az edénynek a lámpák felé fordított vertikálisan állitott hátulsó oldallapján át jutnak a felső folyadékba, megtöretnek és különböző irányokba visszaveretnek.

Az elméletnek megfelelőleg a felülettől vízszintesen visszavert sugarakat kellett észlelnem. E czélból a kapilláris felület elé egy mikroskopot helyeztem, melynek optikai tengelyét vízszintesre tudtam állítani. A mikroskop távolságát alkalmasan választva, abban az izzólámpának a kapilláris felület adta képe jelenik meg vékony vízszintes csík alakjában. Ha eme csík a látótér közepén van, akkor azon keskeny sugárkúp tengelye, mely a csíkot adja, vízszintes, tehát megadja azt a sugarat, mely a kapilláris felületről vízszintesen verődik vissza. Ha a másik izzólámpa képét akarom a látótér közepére hozni, a mikroskopot függélyes irányban el kell tolni; az eltolás nagysága adja $(z_2 - z_1)$-t.

Szigorúan tehát úgy kellene eljárni, hogy a mikroskopot eltolom függélyes irányban, hogy egyszer az egyik, azután a másik csík kerüljön a látótér közepére. Gyorsabban keresztülvihető a mérés, ha a mikroskop okulárjában mikrometerskálát alkalmazunk, melyen a két csík távolságát mikrometerskálarészekben rögtön leolvashatjuk. Igaz, hogy akkor a két csík nincs a látótér közepén s így a képet adó sugárkúp tengelye sem vízszintes. A csíkoknak ily módon mért távolsága tehát nem felel meg pontosan a $z_2 - z_1$-nek. A mig azonban az említett sugárkúpok tengelye a vízszintessel kicsiny szöget képez, az ebből származó hiba másodrendű végtelen kicsiny eme szöghöz képest s azért elhanyagolható. Ugyanis a lámpából kiinduló sugarak egy kaustikát adnak, melyet a felületről visszavert sugarak érintenek. A vízszintes tengelyű sugárkúp csúcsa tehát eme kaustika legmagasabb vagy legmélyebb pontjában (P) van; az eme sugárkúphoz közelfekvő kissé ferde tengelyű sugárkúp csúcsa P-hez igen közelfekvő pont, mely a másodrendű végtelen kicsinyek elhanyagolásával P-vel egy magasságban fekszik.

Minthogy a mikroskópot nem lehetett egyszerre mind a két csíkra élesen beállítani, csak külön-külön, azért a leolvasás pontosságának fontos feltétele, hogy a távcső vízszintes tengelye az egész mikroskóp előre vagy hátratolása közben vízszintes irányát ne változtassa. Erről méréseim kezdetén külön e czélra keresztülvitt kisérletekkel győződtem meg: vízszintes higanytükör felé két függélyes varrótűt helyeztem a mikroskóptól külömböző távolságra. A mikroskópot élesen beállítottam az egyik tűre és annak képére és észleltem a tű csúcsa és ennek képe felezőpontjának állását az okulármikrométeren. Ezután eltoltam a mikroskópot a másik tűre s annak tükörképére s meggyőződtem, hogy ennek csúcs és képe felezőpontja ugyanoda esik, mint előbb. A mikroskóptávcsövet átlag 12-szeres nagyitás mellett használván, lehetséges volt 0·008 mm.-nyi pontosságot érni el a fénycsíkok vertikális távolságának leolvasásában.

Hogy eme fénycsíkok melyike származik az első lámpától (L_1), megtudjuk úgy, hogy egy keskeny, egyenesre vágott kemény papirlapot — a mit az edény felső szélére helyezünk — addig csúsztatgatunk, míg a mikroskóptávcső látterében az egyik fényes csík épen eltünik. Ha most megmérjük az eltünési helynek az első lámpától való horizontális távolságát ($E_1D_1 = a_1$) és megmérjük az első lámpának az edény szélétől számitott magasságát ($D_1L_1 = b_1$), akkor

$$\operatorname{tg} i_1 = \frac{a_1}{b_1},$$

i_1 ismeretével pedig a törési törvény szerint:

$$\sin \psi_1 = \frac{\sin i_1}{n}, \qquad 1.,$$

a hol n a felső folyadék törésmutatója.

A második lámpához és csíkhoz tartozó, az ábrával világosan értelmezett i_2 szög mérésénél így járunk el: Egy kisebb Bunsen-állvány csiptetőjébe vízszintes állásban egy 15—20 cm hosszú hengeres üvegpálcza van befogva. Erre az üvegpálczára selyemszálakkal fel és alá könnyen mozgatható, alól egyenesre vágott papirlap van erősítve. Ezt az egyszerű segédeszközt az üvegedény hátulsó lapjához állítjuk úgy, hogy a papiroslap a vertikális üveglaphoz hozzásimuljon; ezzel könnyen és pontosan meghatározhatjuk a második csík eltünési helyét. Ha most lemérjük $D_2E_2 = a_2$ és $D_2L_2 = b_2$ távolságokat, akkor

$$\operatorname{tg} i_2 = \frac{a_2}{b_2},$$

i_2 ismeretével pedig a törési törvény szerint:

$$\cos \psi_2 = \frac{\cos i_2}{n}, \qquad 2.,$$

a hol n a felső folyadék törésmutatója.

Ha tehát a felső folyadékok törésmutatóját (n) ismerjük, akkor ψ_1 és ψ_2, ezekkel φ_1 és φ_2 ismeretesek, a párhuzamos fénycsíkok vertikális távolságának leolvasásával minden adatunk megvan a közös határfelület spec. koháziójának (a_{12}^2) kiszámítására. Meg kell még mérnünk az egymásra rétegezett folyadékok fajsúlyát, akkor III. egyenletünkből a határfelületi feszültség (α_{12}) értéke közvetlenül kiszámítható.

Méréseim czélja, a mint már említettem, hogy gyarapítsam az e téren még nagyon is szűkkörű kisérleti adatok anyagát vízzel telített szénkéneg és szénkéneggel telített külömböző vizes oldatok határfelületi feszültségének meghatározásával, azon esetleg mutatkozó törvényszerűségeknek a felkutatása, melyek a felületi feszültség értékeit a külömböző oldatoknál jellemzik, végül a felületi feszültség idővel való változásának megfigyelése, a mikor a felső folyadék szabad levegővel érintkezik.

E czélhoz képest szükséges volt nyitott üvegedényt és legalkalmasabb, lehetőleg állandó — természetesen az eltünési helyek csekély változása miatt i_1(kb. 18°) i_2(kb. 80°) nem pontosan konstansok — beesési szögeket használni. Ez utóbbi ok miatt a lámpák állandó távolságban és magasságban tartattak. Az eltünési helyeket minden előállított felületnél külön-külön meghatároztam, így i_1 i_2 kiszámitásánál mindennemű korrekció mellőzhető volt. A beesési szögek ismeretéhez szükséges (a_1 a_2 b_1 b_2) távolságok lemérése mm-nyi pontosságig történt, ennek megfelelőleg a szögeknél is csak a perczeket hoztam számításba.

A megfigyelések közel állandó 20° *C.* középtemperaturára vonatkoznak, a kisérleti szoba hőmérsékletének szabályozásával alig tesz ki 1·2° *C*-t a maximális ingadozás. A kisérletsorok nagy száma mellett azonban az időbeli változás miatt máskülönben is nehezen mérhető — temperatura-korrekciótól eltekinthetünk.

A fajsúlyok és törésmutatók — amaz a Mohr-féle mérleggel, emez az Abbe-féle refraktométerrel nátrium-fény mellett — háromtizedjegynyi pontosságig ugyanazon temperaturánál lettek meghatározva. A fajsúlyok 20° *C* vizre mint egységre vannak vonatkoztatva. A szénkéneg fajsúlya középértékben = 1·2665. A használt folyadékok — alsó folyadék mindenkor vízzel telitett szénkéneg, kb. 80 cm^3 mindkét folyadékból — pipettával lettek óvatosan egymásra rétegezve; természetesen minden kisérleti edény és folyadék tisztaságára a lehető legnagyobb gondot fordítottam.

A sóoldatok Merck-féle vegytiszta sókból állittattak elő, megfiltráltattak, szénkéneggel többször erősen összerázattak; kitisztúlásuk után határoztam meg előbbb törésmutatójukat, azután fajsúlyaikat.

Minden oldatból legalább 4 friss felületet mértem, kivétel csupán a klorálhydrat, melynek adatai 2—2 igen közel egyező mérésből vannak összeállítva.

Méréseim eredményét két szorosan összefüggő részre osztom, t. i. először a friss határfelületre vonatkozó adatokat ismertetem röviden, azután a felületi feszültségnek idővel való változását.

*

Két folyadék közös határában a felületi feszültség kisérleti tanulmányozásáról tanuskodó irodalom — különösen ha eltekintünk a qualitativ kisérletektől — nagyon kevés.

QUINCKE[1] lapos cseppek és légbuborékokkal, meg aláméritett kapilláris csövekben, A. POCKELS[2] adháziós mérleggel, WATSON[3] a Grunmach-féle hullámmódszerrel különböző folyadékoknak, LERCH[4] aláméritett kapilláris csőben benzol és kisebb koncentrációju sóoldatoknak határfelületi feszültségét mérte. LIPPMANN,[5] majd QUINCKE[6] és utánuk néhányan (Wiedeburg, Christiansen stb.) higany és folyadékok meg sóoldatok határfelületi feszültsége mellett azok potenciál-különbségét kapillárelektrométerrel mérték.

Ezeknek a méréseknek mindegyike azt mutatja, hogy a határfelületi feszültség értékei azonos körülmények között is rendellenességeket mutatnak — rendellenességek («Störungen») alatt értvén az ugyanolyan módszerrel ugyanolyan temperatura mellett nyert értékeknek a megfigyelési hibákon kivűl eső ingadozásait. E miatt felmerül az a kérdés, hogy melyik az azonos körülmények között talált különböző értékek közül a triss határfelület feszültségének valódi értéke?

Az idővel való fogyás miatt némelyek csakis a közelebbről egyező maximális értékeket, mások a bizonyos körülmények között beálló minimális értékeket fogadják el ilyenek gyanánt.

Mivel a rendellenességek mind a két irányban tapasztaltattak, azaz ép úgy lehet a felület felfelé (Nansen, Pockels stb.) mint lefelé anomális, azért legindokoltabbnak látszik az, hogy az észlelt összes értékek középértékét használjuk a friss határ-

---

[1] Pogg. Ann. 139. p. 1—89.
Drude Ann. 9. 1902. p. 1. 743. és 969.
Drude Ann. 10. p. 478, 673.

[2] Wied Ann. 67. 1899. p. 668.

[3] Beibl. 26. 1902. p. 651.

[4] Drude Ann. 9. 1902. p. 434.

[5] Pogg. Ann. 149. 1873. p. 546.

[6] Pogg. Ann. 153. 1874. p. 184.

felületi feszültség legvalószinűbb értékei gyanánt. Ép ezért a következő táblázatok ez alapon vannak összeállítva.

Az első táblázat szénkéneg-viz, továbbá vizzel telitett szénkéneg és szénkéneggel telitett viz határfelületi feszültségéhez különböző beesési szögek (i_1 i_2) mellett nyert adatokat tünteti fel. a_{12} mm-ben, α_{12} mindenütt $\frac{\text{mgr}}{\text{mm}}$-ben van mérve.

Az oldatokra vonatkozó táblázatokhoz meg kell jegyeznem, hogy minden mérés előtt az illető oldat készitéséhez használt destillált vizzel tettem előbb mérést, hogy a vizet határozott összehasonlitó egységként használhassam. A II—XII. tábl.-ban N az oldat norm. konc., s_1 az oldat fajsúlya 20° C-nál, $\alpha_{12}\frac{\text{mgr}}{\text{mm}}$-ben a fel. feszültség.

	I. 1. Szénkéneg és viz			2. Telitett viz és szénkéneg
Sor-szám	i_1	i_2	α_{12}	α_{12}
1.	10° 35′	81° 47′	5·572	5·587
2.	23° 30′	80° 31′	5·708	5·735
3.	12° 57′	80° 36′	5·921	5·691
4.	11° 5′	82° 31′	5·798	5·868
5.	12° 8′	80° 26′	5·963	5·791
6.	22° 2′	82° 44′	5·952	5·798
7.	12° 23′	80° 42′	5·755	5·902
8.	10° 52′	82° 31′	5·895	5·827
9.	18° 29′	80° 21′	5·997	5·732
10.	18° 13′	79° 28′	5·854	5·863
11.	18° 15′	79° 15′	5·871	5·768
12.	18° 18′	79° 12′	5·951	5·923
Középértékben			5·853	5·792

Viz és szénkénegnél $a_1^2=34{\cdot}26$ és $\alpha_{12}=4{\cdot}56$
Telitettnél ... ... $a_1^2=33{\cdot}55$ és $\alpha_{12}=4{\cdot}47$

II. $CuSO_4+5H_2O$ $Ms=249{\cdot}5$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
Ø	0	1	4·47
I.	0·030	1·003	4·46
II.	0·060	1·005	4·39
III.	0·119	1·016	4·40
IV.	0·234	1·035	4·36
V.	0·457	1·069	4·29
VI.	0·564	1·091	4·52
VII.	0·837	1·125	4·65
VIII.	0·871	1·132	4·49

III. $Fe_2(SO_4)_3$ $Ms=400{\cdot}19$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
Ø	0	1	4·47
I.	0·031	1·008	4·53
II.	0·062	1·018	4·49
III.	0·123	1·038	4·35
IV.	0.242	1·088	4·12
V.	0·357	1·114	4·31
VI.	0·469	1·159	3·90
VII.	0·578	1·201	3·73
VIII.	0·683	1·238	2·25

IV. $NaCl$ $Ms=58{\cdot}49$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I.	0·191	1·006	4·44
II.	0·381	1·013	4·40
III.	0·770	1·028	4·29
IV.	1·477	1·058	4·19
V.	2·840	1·113	4·14
VI.	4·117	1·161	4·10
VII.	4·826	1·187	3·91
VIII.	5·271	1·202	4·12

V. KCl $Ms=74{\cdot}59$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I	0·234	1·010	4·38
II.	0·461	1·023	4·48
III.	0·906	1·044	4·32
IV.	1·753	1·080	4·27
V.	2·155	1·097	4·14
VI.	2·666	1·115	4·17
VII.	3·288	1·149	4·01

VI. $NaNO_3$ $Ms=85·1$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
Ø	0	1	4·47
I.	0·088	1·004	4·46
II.	0·175	1·008	4·50
III.	0·305	1·016	4·48
IV.	0·603	1·032	4·58
V.	1·179	1·067	4·40
VI.	2·257	1·125	4·48
VII.	2·595	1·141	4·16
VIII.	2·915	1·162	4·29
IX.	3·428	1·181	4·08
X.	3·819	1·205	3·93
XI.	4·074	1·222	3·62

VII. KNO_3 $Ms=101·18$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I.	0·074	1·004	4·50
II.	0·171	1·012	4·45
III.	0·340	1 021	4·50
IV.	0·669	1·040	4·45
V.	0·988	1·061	4·64
VI.	1·298	1·078	4·60
VII.	1·596	1·096	4·41
VIII.	1·886	1·115	4·34
IX.	2·167	1·131	4·35
X.	2·440	1·148	4·29
—	—	—	—

VIII. H_2SO_4 $Ms=98$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I.	0·068	1·004	4·44
II.	0·336	1·021	4·38
III.	0·670	1·039	4·28
IV.	1·275	1·077	4·01
V.	2·390	1·141	3·79
VI.	4·246	1·244	1·85

IX. HCl $Ms=36·4$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
Ø	0	1	4·47
I.	0·129	1·003	4·43
II.	0·330	1·005	4·37
III.	0·632	1·009	4·31
IV.	0·879	1·016	4·34
V.	1·483	1·026	4·25
VI.	2·637	1·042	4·15
VII.	3·242	1·056	4·03
VIII.	3·544	1·061	4·18
IX.	4·176	1·068	4·31

X. H_3BO_3 $Ms=62{\cdot}03$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I.	0·054	1·002	4·40
II.	0·160	1·003	4·37
III.	0·266	1·005	4·33
IV.	0·370	1·007	4·30
V.	0·474	1·009	4·30
VI.	0·593	1·014	4·23

XI. $C_3H_5(OH_3)$ $Ms=92$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I.	0·161	1·004	4·39
II.	0·318	1·006	4·38
III.	0·523	1·011	4·31
IV.	1·007	1·022	4·17
V.	3·170	1·097	3·54
VI.	3·481	1·108	3·43

XII. $C_{12}H_{22}O_{11}$ $Ms=342$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I.	0·058	1·007	4·35
II.	0·100	1·013	4·30
III.	0·147	1·020	4·36
IV.	0·257	1·037	4·34
V.	0·376	1·055	4·35
VI.	0·456	1·070	4·34
VII.	0·524	1·083	4·33
VIII.	0·653	1·110	4·30

XIII. $C_2Cl_3H(OH)_2$ $Ms=165{\cdot}2$			
Oldat szám	N	s_1	α_{12}
0	0	1	4·47
I.	0·040	1·004	4·16
II.	0·198	1·014	3·32
III.	0·390	1·030	2·86
IV.	0·753	1·057	2·36
V.	1·412	1·103	1·77
VI.	1·855	1·136	1·40
VII.	2·260	1·161	1·37

Legelőször, mint az I. táblázat 1. része mutatja, mintegy a módszer tanúlmányozására és a már emlitett rendellenességek határának megállapitására szénkéneggel és vízzel végeztem 36 friss felület előállitásával egy kisérletsort. Igy 3—3 új felület mérésének eredménye van egy-egy sorszám alatt összefoglalva. Az I. táblázat második részében ugyanazon beesési szögek mellett vízzel telített szénkéneg és szénkéneggel telített víz 36 friss felületének adatai vannak összeállítva.

Víz és szénkéneg friss határfelületén méréseim középértékében:

$$a^2_{12} = 34{\cdot}26 \text{ mm}^2 \text{ és } a_{12} = 4{\cdot}56 \frac{\text{mgr}}{\text{mm}}.$$

QUINCKE[1] ezeket az értékeket találja 20° C-nál:

1. Hat, vízben lévő lapos szénkénegcsepp méreteiből:

$$a_{12} = 4{\cdot}26 \frac{\text{mgr}}{\text{mm}}.$$

Ennek az értéknek a meghatározásánál az ingadozás: min. = 3·89, max. = 4·56.

2. Három különböző átmérőjű kapilláris csővel:

$$a_{12} = 4{\cdot}27 \frac{\text{mgr}}{\text{mm}}.$$

Itt az ingadozás: min. = 4·06, max. = 4·45.

Eredményeinek középértéke tehát mindkét esetben igen közel egyező és az általam talált értéknél kisebb. — MAGIE,[2] LOHNSTEIN,[3] különös részletességgel WORTHINGTON[4] foglalkoznak azokkal a hibákkal, melyek Quincke méréseiben — lapos cseppek és buborékok dimensiójából — előfordulnak. Worthington korrekciós formulát állít fel és egy a MAXWELL-féle[5] hőtanban szereplő Quincke-féle táblázatot ennek alapján átszámít. Szénkéneg és vízre a korrigáló formulával nyeri, hogy $a_{12} = 4{\cdot}09 \frac{\text{mgr.}}{\text{mm.}}$

Míg azonban az összes többi folyadékoknál a kapilláris csövekben nyert eredmények a redukcióval nyert értéknél

[1] Pogg. Ann. 139. p. 18.
[2] Wied. Ann. 25. p. 421.
[3] Wied. Ann. 53. p. 1062.
[4] Journ. d. Phys. (2) 5. p. 231.
[5] Theor. d. Wärme. Braunschweig. 1878. p. 331.

mindenkor kisebbek, addig a szénkéneg és viz határfelületén — a mint látjuk — éppen ellenkezőleg, azért itt a szénkéneg kivételt képez. Máskülönben is a szénkéneg anyagbeli különbsége, az ingadozásokkal jellemzett rendellenességek és a használt módszerekben rejlő eltérések könnyen megmagyarázzák a különbség okát.

Vízzel telített szénkéneg és szénkéneggel telített víz közös határfelületén méréseim szerint:

$$a^2_{12} = 33\cdot55\,\mathrm{mm}^2 \text{ és } a_{12} = 4\cdot47\,\frac{\mathrm{mgr.}}{\mathrm{mm.}}$$

Itt tehát a kapilláris konstansok kisebbek, a mi azt látszik bizonyítani, hogy kölcsönös oldásukkal fogy a határfelületi feszültség. Viszont azonban a rendellenességek itt is fellépnek — azt mutatván, hogy azok nem lehetnek pusztán a folyadékok kölcsönös oldásának következményei.

Annak eldöntésére, hogy az egyes oldatok kémiai szerkezetének van-e befolyása a határfelületi feszültség értékére — a táblázatok világosan azt mutatják, hogy a fajsúlyilag egyező oldatok eltérő felületi feszültségeket adnak. Egyébként, hogy a közös határ felületi feszültsége nem csupán az érintkező folyadékok fajsúlyától függ, azt már GUTHRIE [1] is állítja, a ki különböző átmérőjű kapilláris csövekből kieső folyadékcseppek számának meghatározásával tett qualitativ határfeszűltségi tanúlmányokat. LINEBARGER [2] értekezéséből még messzebbmenő következtetéseket vonhatunk. Ő ugyanis különböző folyadékok kémiai alkata és ezen folyadékoknak valamely közös alapfolyadékra vonatkoztatott határfelületi feszültsége között keres összefüggést. Pipettából kiejtett folyadékcseppek számából következtet a határfelületi feszültség nagyságára, annak értékét azonban nem ismeri, mivel a pipetta nyilásának rádiusát nem mérte meg. Igy mérései csupán komparativok, melyekből az tünik ki, hogy valamely alapfolyadék — nála a viz — és

[1] Kivonatban Pogg. Ann. 131. p. 141.
[2] Phys. Revue 2. 1892. p. 371.

egyenlő fajsúlyú rokon kémiai szerkezetű folyadékok határfelületi feszültsége egyenlő. Eredményeim ennek a tételnek ellentmondanak, mert ezek szabálytalanságából szigorúan csak azt következtethetjük, hogy olyan egyszerű relációk, mint sóoldatok szabad felületére tapasztaltak itt közelítőleg sem állanak, mert a mint a táblázatok összehasonlításából kitünik, úgy az egyenlő fajsúlyú, mint az egyenlő molekuláris koncentrációjú oldatok eltérő felületi feszültségeket mutatnak.

A mi a változás nagyságát illeti — legkisebb, közel állandónak tekinthető a felületi feszültség a czukornál s ugyanazon molekuláris koncentráció határokra nézve glycerin, sósav, KCl, KNO_3, $NaNO_3$, kénsav és bórsav állanak utána.

Sokkal nagyobb a változás $NaCl$, rézgálicz és ferrisulfátnál s különös magatartásával a klorálhydrat zárja be a sort.

A különböző anyagok vizes oldatai a változás minőségét illetőleg is nagyon különböző viselkedést tanúsítanak. Így például $CuSO_4$-nél kezdetben a feszültség fogy, bizonyos határnál emelkedik, míg $Fe_2(SO_4)_3$-nál a fogyás végig elég erős. $NaCl$ és KCl-nál a_{12} értékei meglehetős hasonlatossággal fogynak, hasonlóság mutatkozik a $NaNO_3$ és KNO_3 magatartása között is, mert mindkettőnél a feszültség kezdetben növekedik s csak azután fogy. HCl sokkal kevésbbé fogy, mint a kénsav és minimumot látszik mutatni. Míg a czukor — mint már említettem — alig változik, a klorálhydrát rendkivül erős fogyást mutat.

A vizes oldatok felületi feszültségének magatartása szerint rendezett sorból az is világosan kitünik, hogy elektrolytek és nem elektrolytek elválasztó vonalakat nem tüntetnek fel a határfelületi feszültség értékeiben.

*

Régóta tapasztalt jelenség levegővel határolt szabad folyadékfelületek esetén a kapilláris konstansnak az idővel való változása, a mint azt Frankenheim,[1] Hagen,[2] Harnack,[3] Ober-

[1] Pogg. Ann. 37. 1836. p. 409.
[2] For. d. Phys. 1859. p. 123.
[3] Zs. f. phys. Chem. 32. p. 185.

MAYER,[1] VALSON,[2] TRAUBE,[3] GOLDSTEIN,[4] MARANGONI,[5] OCHSE,[6] POCKELS,[7] QUINCKE,[8] KLUPATHY[9] stb. megfigyelései igazolják. Ennek a változásnak tanulmányozását nagyon megnehezítették a friss felületnél fellépő rendellenességek. Legnagyobbrészt ez az oka annak, hogy a kisérleti kapillaritási tanulmányok a felületi feszültség értékét és változásait illetőleg egységes eredményeket nem tudnak felmutatni. Elegendő erre vonatkozólag az ugyanazon sóoldatok friss felületére ugyanazon módszerekkel talált egymásnak ellentmondó eredményekre utalni.

Két folyadék közös határfelületén a felületi feszültségnek az idővel való fogyását tapasztalták és behatóbb tanulmány tárgyává tették QUINCKE[10] és A. POCKELS.[11] Mivel Quincke mérései szerint két folyadék (higany és különböző folyadékok, alkohol és különböző sóoldatok, æther és víz stb.) közös határfelületén ugyanolyan rendűnek és természetűnek látszik a fogyás, mint szabad felület esetén, azért az idővel való fogyást mindkét esetben azonos külső okokra: az edényfalnak, a környező levegőnek vagy magának a tanulmányozott folyadékoknak bizonyos tisztátalanságaira, bepiszkolódására igyekeztek visszavezetni. Így A. POCKELS[12] víz-benzol, benzin, petroleum határfelületén ilyen tényezőkben keresi a változás okát.

QUINCKE[13] a felületi feszültségnek az idővel való fogyását az elastikus utóhatás jelenségével hasonlítja össze, a mely felfogásban két folyadék közös határfelületét úgy tekintjük, mint

---

[1] For. d. Phys. 1870. 26. p. 177.
[2] Journ. f. pract. Chem. 139. 1885. p. 107.
[3] Exn. Rep. d. Phys. 26. p. 641.
[4] Beibl. 15. 1891. p. 172.
[5] Journ. d. Phys. (3) 2. 1893. p. 68.
[6] Wied. Ann. 30. p. 209.
[7] Wied. Ann. 8. p. 861.
[8] Pogg. Ann. 160. 1877. p. 560.
[9] Math. u. Nat. Ber. a. Ung. 5. 1887. p. 101—107.
[10] Pogg. Ann. i. h.
[11] Wied. Ann. 67. 1899. p. 668.
[12] Wied. Ann. 67. 1899. p. 668.
[13] Pogg. Ann. 160. 1877. p. 560—588.

egy kifeszített elastikus hártyát. Adott idő szükséges ahhoz, hogy a hártya feszültsége stacionárius állapotba jusson s ez idő alatt észleljük a kapilláris konstans rohamos változását. Mérései azt mutatják, hogy nagyobb határfelület esetén nagyobb a változás. Ezt azzal magyarázza, hogy a szilárd faltól nagyobb távolságban bármilyen eredetű háborgatás könnyebben idézi elő a molekulák helyzetének és hatásának változását, mint a faltól kisebb távolságban «épen úgy, mint a vihar a tó jégfedelét a parttól nagyobb távolságban könnyebben széttöri, mint a parton magán». E háborgatásokban nagy szerepe van az említett külső tisztátalanságokon kívül annak is, hogy a legtöbb folyadék az üveget oldja, az oldott részek a felületen kiterjednek, ez az igen vékony tisztátalan réteg pedig erősen befolyásolja a molekuláris vonzást (Röntgen, Volkmann stb.). Sóoldatok felületi feszültségének a fogyását azzal is magyarázza, hogy ezen folyadékokat, mint bizonyos mennyiségű nagy felületi feszültségű koncentrált sóoldat és kisebb felületi feszültségű tiszta víz (későbbi magyarázatában «sóban gazdag és sóban szegény vizes oldat») keveréke gyanánt fogja fel. Mivel a két folyadék minden arányban keverhető, azért közös határfelületök feszültsége nulla. E miatt a kisebb felületi feszültségű víz (illetőleg a «sóban szegény vizes oldat») a keverék felületén kiterjed és így a felületi feszültség megkisebbedik. A kapilláris konstansnak általam tapasztalt némi szabályosságot mutató fogyásának bizonytalan külső tisztátalanságokkal is (Pockels) nagyon kétséges a magyarázata.

Általánosabb az a felfogás, mely szerint két folyadék közös határában a felületi feszültség fogyásának az az oka, hogy az egymással érintkező folyadékok kölcsönösen oldódnak, az oldás befejeztével pedig egy olyan határréteg áll elő, melyet a két folyadék részecskéi közösen alkotnak s melynek felületi feszültsége kisebb, mint az eredeti rétegé. (CHWOLSON.)[1]

Épen ez a nagyon természetesnek látszó magyarázat indított

[1] Lehrb. d. Phys. I. p. 561—613. VIII. f.

arra, hogy lehetőleg — kémiailag inaktiv — egymásban oldhatatlan folyadékokkal tegyek kisérletet. E czélból szénkéneggel telített vízzel és vízzel telített szénkéneggel 8 gondos mérést végeztem. Eredményeképen azonban állíthatom — mint az idővel való változásra vonatkozó I. 2. táblázat három sorozata mutatja, hogy bár lassúbb lefolyással itt is bekövetkezik a határfelületi feszültség idővel való fogyása hasonló törvényszerűségek szerint, mint például a némileg oldódó szénkéneg és víz esetében. (I. 1. táblázat.)

Szénkéneg és vízen kívül: vízzel telített szénkéneg és szénkéneggel telített rézgálicz, ferrisulfát, konyhasó, káliumchlorid, kaliumnitrát és nátriumnitrát oldatainak határán mértem meg a határfelületi feszültség idővel való változását.

Ezek a mérések rendkívüli óvatosságot kivánnak. A kisérleti szoba temperaturájának relative csekély változásai, vagy bármilynemű tisztátalanságnak már a nyomai is érzékenyen befolyásolják a változás lefolyását. Lehető legnagyobb tisztaság, állandó temperatura és sok mérés teszik csak lehetővé ennek megfigyelését. Ellenkező esetben igen könnyen tapasztalhatunk olyan anomáliákat, a milyeneket, Quincke is tapasztalt a temperatura alacsonyodásánál, vagy a milyeneket Pockels tanulmányozott a felület mesterséges bemocskolásával. Mivel a változás lefolyása az említett oldatoknál nagyon hasonló, bővebb időintervallumra elegendőnek találom a víz, $CuSO_4$ és a $NaCl$ változásait felsorolni.

«Az időbeli változást» feltüntető első táblázat 3 első sorozatában szénkéneg és vízre, másik három sorozatában szénkéneggel telített víz és vízzel telített szénkéneg határfelületére a dátumok idején végzett három-három különálló mérési sor eredményei vannak összefoglalva. A többi táblázatok 4—4, legalább két óráig tartó megfigyelés eredményeit tartalmazzák. «Idő» rovat jelenti a friss határfelület előállításától számított időt. α_{12} a határfelületi feszültség értéke $\frac{\text{mgr}}{\text{mm}}$-ben az első oszlopban jelzett időpontokban.

I. Időbeli változás víz-szénkéneg határfelületén

Idő	1. Víz és szénkéneg			Idő	2. Telített víz és szénkéneg		
	1906 XII/6—7	1907 III/5—6	1907 II/3		1907 I/22—23	1906 XII/9	1907 II—3
	α_{12}				α_{12}		
0′	4·65	4·56	4·50	0′	4·48	4·38	4·39
10′	4·33	4·42	4·38	10′	4·33	4·28	4·31
30′	4·17	4·21	4·31	30′	4·17	4·19	4·22
1^h	4·06	4·10	4·17	1^h	4·02	4·10	4·17
2^h	4·03	4·07	4·03	2^h	3·94	4·00	4·08
4^h	3·99	4·00	4·00	4^h	3·91	3·90	4·02
24^h	3·52	3·73	—	24^h	3·51	3·60	—
48^h	3·30	3·33	—	48^h	3·28	—	—

II. Idő. való vált. vízzel tel. szénk. és szénk. tel. $CuSO_4$ oldatoknál.

Idő	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
	oldat							
	α_{12}							
0′	4·56	4·40	4·41	4·34	4·29	4·54	4·61	4·47
10′	4·32	4·11	4·22	4·05	4·18	4·29	4·33	4·33
30′	4·11	4·07	4·11	3·95	4·09	4·18	4·24	4·14
1^h	4·03	4·03	3·98	3·95	4·09	4·08	4·09	4·09
2^h	3·95	3·96	3·89	3·89	—	4·03	4·00	3·92
4^h	3·83	—	3·78	3·84	—	—	3·93	3·77
24^h	3·45	3·54	3·54	—	3·80	—	3·66	—

III. Id. v. vált. vizzel tel. szénk. és szénk. tel. ferrisulfát oldatoknál

Idő	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
	oldat							
	α_{12}							
0'	4·53	4·49	4·35	4·12	4·31	3·90	3·83	2·25
10'	4·21	4·22	4·15	4·02	4·12	3·72	3·66	2·18
30'	4·08	4·16	4.07	3·96	3·95	3·64	3·56	2·14
1^h	4·00	4·13	4·07	3·96	3·95	3·61	3·52	2·14
2^h	3·96	4·09	—	3·90	—	3·59	3·52	—

IV. Id. v. vált. vizzel tel. szénk. és szénk. tel. konyhasó oldatoknál

Idő	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
	oldat							
	α_{12}							
0'	4·54	4·44	4·26	4·31	4·25	4·21	4·02	4·16
10'	4·38	4·11	4·10	4·12	4·09	4·07	3·94	4·09
30'	4·22	4·03	4·02	4·01	4·03	4·01	3·94	4·01
1^h	4·01	3·99	3·96	3·98	3·93	3·97	3·86	3·92
2^h	3·95	3·94	3·93	3·98	3·93	3·97	3·86	3·92
4^h	3·88	3·94	3·86	3·92	—	—	3·76	3·79
16^h	3·59	—	3·73	3·82	—	—	—	3·59

V. Id. v. vált. vizzel tel. szénk. és szénk. tel. chlórkalium oldatoknál.

Idő	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
	oldat						
	α_{12}						
0′	4·38	4·48	4·32	4·27	4·14	4·17	4·01
10′	4·16	4·21	4·21	4·11	4·02	4·10	3·92
30′	4·09	4·08	4·13	3·98	3·93	4·03	3·89
1^h	4·05	3·98	4·13	3·89	3·93	4·01	3·89
2^h	4·00	3·85	4·09	3·82	3·87	3·99	—

VI. Id. v. vált. vizzel tel. szénk. és szénk. tel. nátriumnitrát oldatoknál.

Idő	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
	oldat										
	α_{12}										
0′	4·46	4·50	4·48	4·58	4·40	4·48	4·16	4·29	4·08	3·93	3·62
10′	4·28	4·23	4·04	4·42	4·17	4·30	4·00	4·11	3·85	3·72	3·50
30′	4·17	4·12	4·04	4·32	4·10	4·17	4·00	3·93	3·76	3·61	3·40
1^h	4·09	4·12	3·98	4·21	4·10	4·07	3·89	3·88	3·76	3·61	3·31
2^h	4·02	4·09	—	—	—	3·95	—	3·76	—	—	3·31

VII. Id. v. vált. vizzel tel. szénk. és szénk. tel. káliumnitrát oldatoknál.										
Idő	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
	o l d a t									
	α_{12}									
0′	4·55	4·49	4·56	4·39	4·73	4·51	4·48	4·38	4·43	4·33
10′	4·28	4·15	4·46	4·22	4·49	4·17	4·38	4·22	4·12	4·09
30′	4·14	4·03	4·19	4·05	4·36	4·11	4·29	4·11	4·03	4·03
1^h	4·07	3·96	4·10	4·00	4·21	3·99	4·19	4·11	3·94	3·95
2^h	4·07	3·96	4·06	3·93	4·16	3·99	4·07	4·06	3·92	3·91

A táblázatok szerint megfigyeléseim eredményei azt mutatják, hogy az említett külömböző sóoldatok felületi feszültsége ugyanúgy változik az idővel, mint a víz és szénkéneg határfelületi feszültsége.

Láthatjuk továbbá, hogy a határfelületi feszültség fogyása nem arányos az eltelt idővel, a fogyás nem egyenletes, hanem a felület előállítását követő perczekben a legrohamosabb, azután mindinkább lassúbb-lassúbb lesz.

Az időbeli változás lefolyásával kapcsolatosan épen csak megemlítem itt Lippmannak [1] Kirchoff laboratoriumában végzett ismeretes kisérleteit, melyekkel higany és higított kénsav határfelületén fellépő elektromos potenciálkülömbséget mérvén kimondotta a tételt, hogy «a kapilláris konstans (felületi feszültség, Laplace-féle formula koëfficiense) higany és higított kénsav határfelületén folytonos függvénye a polarizáció elektromotoros erejének ugyanezen a felületen». A felületi feszültség idővel való először rohamosabb, azután lassúdó fogyását — e tétel alapján — a polarizáció megfelelő fogyásával magyarázza.

Krouchkoll [2] úrnak ugyancsak a kapillárelektrométerrel végzett kisérletei azt mutatják, hogy (æther-víz, továbbá) szén-

[1] Pogg. Ann. 149. 29. 1873. p. 546—561.

[2] Journ. d. Phys. 3. 1884. p. 303. és F. d. Phys. 39. p. 328.

kéneg és viz közös határának felületi feszültsége szintén folytonos függvénye a közöttük fellépő potenciálkülömbségnek. Természetes azonban, hogy további beható vizsgálatokat kell végezni arra vonatkozólag, hogy a potenciálkülömbség ez esetben is mutat-e az idővel és pedig olyan rendű és természetű változást, mint a közös határfelület feszültsége?

*

Szabad legyen e helyen is hálás köszönetet mondanom dr. Tangl Károly egyetemi tanár úrnak, a kolozsvári tud. egyetem physikai intézete igazgatójának, a ki szives jó tanácsaival lehetővé tette e tanulmány létrejöttét.

Batta István.

ADALÉK AZ ÉGI TESTEK KÖR-PÁLYASZÁMÍTÁSÁHOZ.

Ha arról van szó, hogy valamely kis bolygót rövid ideig, a míg a rendszeres pályaszámítást végrehajtjuk, követhessünk, elegendő kör-pályaszámítást végezni, a melyre két teljes, rövid időközben végzett megfigyelés szükséges. Már e számítás eredményei is elég felvilágosítást nyujtanak a pályaelemek természetéről.

Két teljes megfigyelésből a kis bolygó ephemeridje, heliocentricus coordinatái:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \sin(A+\mu t) \\ y &= \beta \sin(B+\mu t) \\ z &= \gamma \sin(C+\mu t) \end{aligned} \tag{1}$$

egyenletekből számíthatók.

Az első pillanatra úgy látszik, hogy a kör-pálya elemei feltétlenül nyerhetők.

Wolf 1894 nov. 1-én Heidelbergben a *BE* kis bolygót fedezte fel photographiai úton. E bolygónak igen nagy napi mozgása volt. Schulhof Párisban két megfigyelésből kör-pályát számított, hogy a pályaelemekről tájékozódjék, azonban kisérletét nem követte siker, mert a kör sugarára nem kapott használható reális értéket. Ez arra ösztönözte Tisserandt,* hogy kimutassa, miszerint a problémában imaginarius gyökök is vannak bizonyos feltevések mellett.

Legyenek t_1, illetve t_2 időben a bolygó heliocentricus coordinatái: x_1, y_1, z_1; illetve x_2, y_2, z_2; a Földéi: R_1, L_1;

---

* Compt. rend. hebdomadaires, tome 119. Paris 1894, pag. 881.

illetve R_2, L_2. Ha még a bolygó geocentricus coordinátái t_1, illetve t_2 időben: ρ_1, λ_1, β_1; illetve ρ_2, λ_2, β_2, akkor:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \cos L_1 + \rho_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1, \\ y_1 &= R_1 \sin L_1 + \rho_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1, \\ z_1 &= \rho_1 \sin\beta_1, \\ x_2 &= R_2 \cos L_2 + \rho_2 \cos\beta_2 \cos\lambda_2, \\ y_2 &= R_2 \sin L_2 + \rho_2 \cos\beta_2 \sin\lambda_2, \\ z_2 &= \rho_2 \sin\beta_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Ha a körpálya sugara a és $2f$ azon szög, melyet a bolygó heliocentricus vezérsugarai az első és második helyen képeznek, akkor:

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+z_1^2 = x_2^2+y_2^2+z_2^2 &= a^2 \\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 &= a^2\cos 2f. \end{aligned} \tag{3}$$

A (2) folytán:

$$a^2\cos 2f = \cos 2f_0 + A\rho_1 + A'\rho_2 + B\rho_1\rho_2, \tag{4}$$

a hol

$$2f_0 = L_2 - L_1$$

$$A = \cos\beta_1 \cos(L_2-\lambda_1), \qquad A' = \cos\beta_2\cos(L_1-\lambda_2),$$

$$\rho_1 = \sqrt{a^2-\sin^2\psi_1}-\cos\psi_1, \qquad \rho_2 = \sqrt{a^2-\sin^2\psi_2}-\cos\psi_2, \tag{5}$$

$$\cos\psi_1 = \cos(L_1-\lambda_1)\cos\beta_1, \qquad \cos\psi_2=\cos(L_2-\lambda_2)\cos\beta_2,$$

$$B = \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\lambda_2-\lambda_1)+\sin\beta_1\sin\beta_2.$$

A Kepler-féle törvény szerínt:

$$2f = \frac{k(t_2-t_1)}{a^{\frac{3}{2}}}; \quad 2f_0 = k(t_2-t_1), \quad \text{ha} \quad R_1 = R_2 = 1.$$

Így tehát (5) folytán a (4)-ből:

$$\begin{aligned} f(a) = a^2\cos\frac{2f_0}{a^{\frac{3}{2}}} - \cos 2f_0 - A\left(\sqrt{a^2-\sin^2\psi_1}-\cos\psi_1\right) - \\ - A'\left(\sqrt{a^2-\sin^2\psi_2}-\cos\psi_2\right) - \\ - B\left(\sqrt{a^2-\sin^2\psi_1}-\cos\psi_1\right)\left(\sqrt{a^2-\sin^2\psi_2}-\cos\psi_2\right) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

egyenlethez jutunk, melyből a, a kör sugara meghatározandó.

Wolf *BE* bolygója igen nagy napi mozgást mutatott, és

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \sin^2\beta_1,\ \sin^2\beta_2,\ \sin^2(L_1-\lambda_1),\ \sin^2(L_2-\lambda_2) \tag{7}$$

mennyiségek meg igen kicsinyek voltak. Ezekből Tisserand azon eredményhez jutott, hogy körpálya nem található, ha a bolygónak a szélesség coordinatában erős mozgása van. Hozzáteszi Tisserand: valószínű, hogy más feltevések mellett, mint a (7) alattiak, sincsen körpálya. Egy ily esetet szándékom a jelen alkalommal bemutatni.

Tegyük fel, hogy

$$\cos\psi_1,\ \cos\psi_2,\ A \text{ és } A' \tag{8}$$

oly kicsinyek, hogy a harmadrendűeket elhanyagolhatni.

Ekkor:

$$\sqrt{a^2-1+\cos^2\psi_1} = (a^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}\cos^2\psi_1;$$

$$\cos\frac{2f_0}{a^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{(2f_0)^2}{2a^3}$$

$$\sqrt{a^2-1+\cos^2\psi_2} = (a^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}\cos^2\psi_2;$$

$$\cos 2f_0 = 1 - \frac{(2f_0)^2}{2}. \tag{9}$$

A (6) alakja pedig:

$$(a^2-1)(1-B)+(2f_0)^2\frac{a-1}{2a} + A\cos\psi_1 + A'\cos\psi_2 -$$

$$-\frac{(\cos\psi_1+\cos\psi_2)^2}{2} = (a^2-1)^{\frac{1}{2}}[A+A'-B(\cos\psi_1+\cos\psi_2)]. \tag{10}$$

Ha most még a (8) mellett

$$2(A\cos\psi_1+A'\cos\psi_2) = (\cos\psi_1+\cos\psi_2)^2, \tag{11}$$

akkor a-ra a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$a^2+a+\frac{(2f_0)^2}{1-B-(A+A'-B(\cos\psi_1+\cos\psi_2))^2} = 0, \tag{12}$$

melynek biztosan nincs valós gyöke, ha

$$\frac{1}{4} < b,$$

a hol b az absolut tagot jelenti.

Ha a most nyert eredményeinket elemezzük, TISSERAND állítását a (8) és (11) alatti feltevések mellett beigazolva nem látjuk.

Legyen

$$\cos\beta_1 \doteq 1, \quad \cos\beta_2 \doteq 1, \quad \cos\psi_1 \doteq \cos\psi_2, \tag{13}$$

ekkor

$$a^2 + a + \frac{(2f_0)^2}{1-B} = 0,$$

melynek nincsen valós gyöke, a míg

$$\frac{1}{4} < \frac{2(L_2 - L_1)^2}{(\beta_1 - \beta_2)^2}. \tag{14}$$

A (14) alatti feltétel annál jobban ki van elégítve, minél kisebb $\beta_1 - \beta_2$ különbség, e mellett azonban a (13)-nak is közelítőleg fenn kell állnia; de e két feltétel teljesen egybehangzó. A (8), (11), (13) alatti feltételek mellett annál kevésbbé nyerünk körpályát, minél kisebb a napi mozgás. A napi mozgás kicsinysége tehát még nem criterium arra, hogy körpálya található két teljes megfigyelésből.

Terkán Lajos.

Vetitőkészülék «Calderoni II»

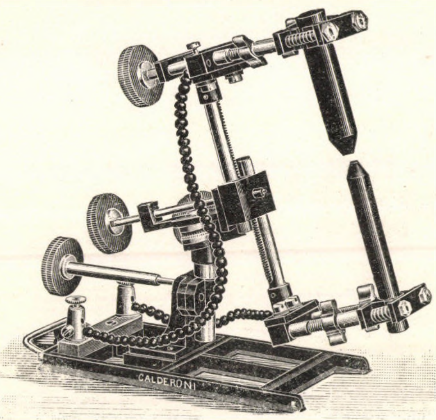
Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, azonban a lámpatartó szekrény acéllemezek helyett feketére égetett 3 mm. vastag sárgaréz-lemezekből van készitve és magnálium hütőbordákkal van ellátva. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—



Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90**.—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27**.—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

	200	240	280	300	320	360	400	480cm.négyzetben
Ára	**40**.—	**58**.—	**75**.—	**82**.—	**98**.—	**130**.—	**180**.—	**224**.— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

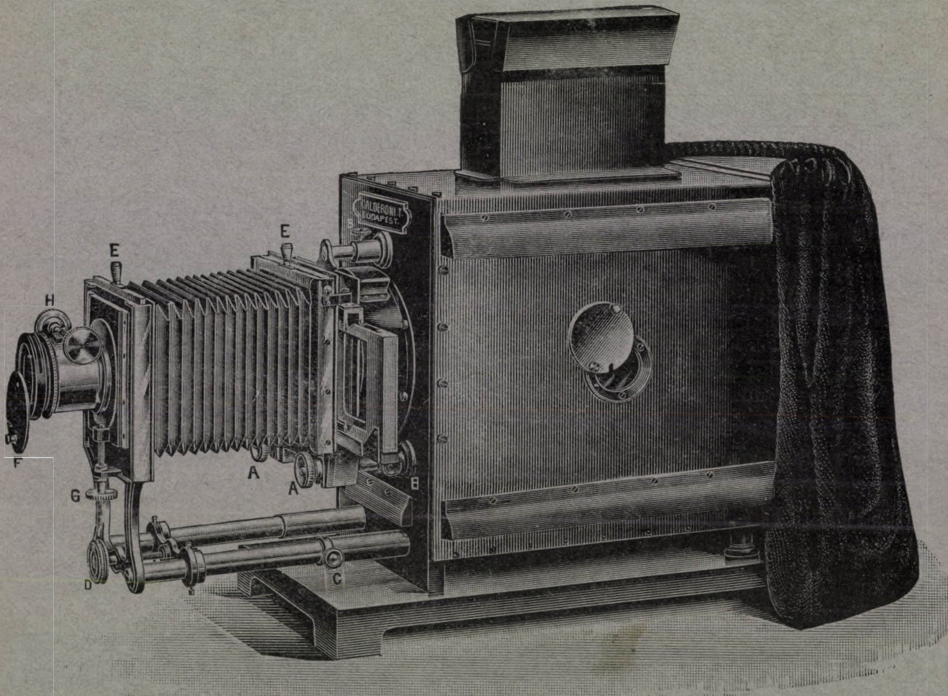
Részletes árjegyzék a jövő tanévben fog megjelenni.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kis hid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék legjobb minőségü aczéllemezekből van készitve, asbestbéléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 11 cm. átm. kettős világitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van felfüggesztve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. A készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.**—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHATODIK ÉVFOLYAM

V. FÜZET 1907 MÁJUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1907.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhatodik társulati év 1907 január 1-jén kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czimére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

A KÖRTANHOZ.

1. A körbe írható egyszerű n-szögek közül a szabályos n-szög a legnagyobb területű és kerületű és a kör köré írható egyszerű n-szögek között a szabályos n-szög a legkisebb területü és kerületű. Ezen régi tételnek igen szép, teljesen elemi geometriai bizonyítását közölte KÜRSCHÁK ur.[1] A következőkben ezt a fontos tételt egyszerű számítással akarom bebizonyítani. Az egész bizonyítás nem egyéb, mint alkalmazása ennek az egyszerű tételnek:

Ha az $x=a$ és $x=b$ $(b>a)$ között az $y=f(x)$ görbe az x tengelyhez mindenütt homorú (vagy domború) oldalával fordul és e görbén tetszésszerinti n pontot választunk és az i-ik pontba m_i tömeget helyezünk el, akkor ez n tömegpont tömegközéppontja a görbe és az x tengely közé (illetve a görbe fölé) esik. A bebizonyítása igen egyszerű, hiszen két-két pont tömegközéppontja mindig az összekötő húrra esik és e húr az első esetben a görbe alatt, a másodikban a görbe fölött vonul. A súlypont ordinátája az első esetben kisebb, a másodikban pedig nagyobb e görbének ugyanazon abscissához tartozó ordinátájánál, azaz:

$$\frac{m_1 f(x_1)+m_2 f(x_2)+\cdots+m_n f(x_n)}{m_1+m_2+\cdots+m_n} < f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)$$

az első esetben és a $<$ helyett $>$ teendő a második esetben.

Ha $m_1=m_2=\cdots=m_n=1$, akkor e két esetre a következő egyszerű egyenlőtlenségeket kapjuk:[2]

---

[1] Math. Annalen 37. k. p. 578.

[2] E tételnek igen szellemes, általánosabb feltételek mellett is érvényes analytikai bebizonyítása CAUCHYtól származik és legutóbb JENSEN egyik értekezésében (Acta math. 30) szép függvénytani alkalmazásait közölte.

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) < nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

és a másodikban:

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) > nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

Az $y=\sin x$ a $0\ldots\pi$ intervallumban mindenütt a homorú oldalával fordul az x tengelyhez, tehát π-nél kisebb szögekre:

$$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n < n\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}. \qquad 1)$$

Ha az r sugarú kör kerületén felvesszük az $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat és meghuzzuk az $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ húrokat (melyek egymást nem metszik), továbbá az $AOA_1, A_1OA_2, \ldots, A_{n-1}OA_n$ középponti szögeket $x_1, x_2, \ldots, x_n$-nel jelöljük (melyek π-nél mind kisebbek), akkor az $OAA_1A_2\ldots A_nO$ sokszögczikk területe:

$$t=\frac{r^2}{2}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

Ha pedig az AA_n körívet n egyenlő részre osztjuk és az így keletkező sokszögczikket rajzoljuk meg, ennek a területe

$$\tau=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Az 1)-ből következik, hogy

$$t<\tau.$$

Ha $x_1+x_2+\cdots+x_n=2\pi$, akkor a $t<\tau$ egyenlőtlenség azt mondja, hogy a szabályos n-szög területe nagyobb bármely beirt n-szög területénél.

Az $AA_1A_2\ldots A_n$ törtvonal hossza:

$$s=2r\left(\sin\frac{x_1}{2}+\sin\frac{x_2}{2}+\cdots+\sin\frac{x_n}{2}\right).$$

Ha pedig az AA_n ívet n egyenlő részre osztjuk fel, az így keletkező törtvonal hossza:

$$\sigma = 2rn \sin \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2n}.$$

És ismét az 1) szerint:

$$s < \sigma$$

és ha megint $x_1+x_2+\cdots+x_n = 2\pi$, azt kapjuk, hogy a szabályos n-szög kerülete nagyobb bármelyik beírt n-szög kerületénél.

Ha pedig az $y = \operatorname{tg} x$ görbét tekintjük, ez a $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ intervallumban a domború oldalát fordítja az x-tengely felé; tehát

$$\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \cdots + \operatorname{tg} x_n > n \operatorname{tg} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}. \qquad 2)$$

Ha az r sugarú körhöz A-ból érintőt huzunk, mely a kört B-ben érinti és az AB folytatásában fölvesszük az A_1 pontot, ebből megint az A_1B_1 érintőt huzzuk, ezen felveszszük az A_2 pontot s i. t. A_n-ig, továbbá $AOB = x_1$, $BOA_1 = x_2$, $A_1OB_1 = x_3$, $B_1OA_2 = x_4, \ldots$, $B_nOA_n = x_{2n}$, akkor az $OAA_1A_2 \ldots A_nO$ sokszögczikk területe

$$t_1 = \frac{r^2}{2}(\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \cdots + \operatorname{tg} x_{2n})$$

és ha az AOA_n szöget $2n$ egyenlő részre osztjuk és ez osztópontokat tekintjük érintéspontoknak, akkor az így keletkező sokszögczikk területe:

$$\tau_1 = \frac{2nr^2}{2} \operatorname{tg} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n}$$

és 2)-ből következik, hogy

$$\tau_1 < t_1.$$

Ha A összeesik A_n-nel, akkor arra jutunk, hogy a körülírt n-szögek között a szabályos n-szög a legkisebb. Ebből már a kerületre nézve is következik ugyanez az állítás.

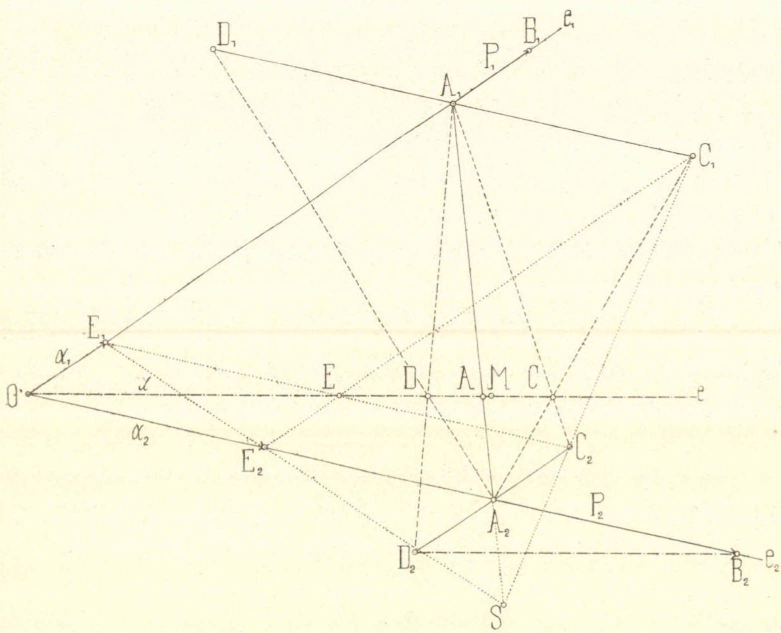
Beke Manó.

ADALÉKOK A STATIKA ELEMEIHEZ.

I.

A merev testet megtámadó két síkbeli erő eredője az erőparallelogramma tétele szerint a két hatásvonal metszéspontjába eltolt erőkre, mint oldalakra rajzolt parallelogramma átlója, a mely természetesen a saját egyenesében tetszés eltolható. Ha azonban a két erő úgy van megadva, hogy hatásvonalaik metszéspontja igen távol, a rajzlapon kívül esik, akkor az eredő meghatározása közvetetlenül nem lehetséges, hanem csak bizonyos alkalmas kisegítő szerkesztések alapján. Mivel a keresett eredő erő nagyságát, irányát és értelmét (vektorát) megadja a tetszőleges helyen rajzolt erő-parallelogramma átlója (a vektorháromszög harmadik oldala), azért a szerkesztésnek csakis arra kell irányulni, hogy meghatározza az eredő erő hatásvonalának egy tetszés szerinti pontját. Ezt a czélt eléri a következő egyszerű és szimmetrikus szerkesztés. (1. ábra.) Adva vannak az $A_1B_1=P_1$ és az $A_2B_2=P_2$ erők; a P_1 erő A_1 támadópontjához hozzáillesztjük a P_2 erő vektorát ($A_1C_1=A_2B_2$), a P_2 erő A_2 támadópontjához hozzáillesztjük a P_1 erő vektorát ($A_2C_2=A_1B_1$) és meghúzzuk az A_1C_2 és A_2C_1 összekötő egyeneseket; ekkor ezeknek C metszőpontja pontja lesz az eredő erő hatásvonalának, ha tehát ezen a C ponton át párhuzamos egyenest (e) húzunk a P eredő vektorával, akkor megkapjuk a keresett hatásvonalat.

A szerkesztés helyes voltának kimutatása legegyszerűbben statikai úton sikerül. Rögtön látjuk ugyanis azt, hogy a $C_1A_1A_2$ idom az a speczialis kötélpoligon, a melyikhez tartozó vektorpoligonban a középső sugár egyenlő nagy és párhuzamos A_1A_2-vel. De ettől egészen eltekintve igen egyszerű a közvetetlen bebizonyítás is. Egészítsük ugyanis ki az adott P_1, P_2 erőrendszert az egymást egyensúlyozó Q_1 és Q_2 erőkkel, melyek az A_1A_2 összekötő egyenesben feküsznek, ellentett értelműek és melyeknek közös nagyságát az A_1A_2 távolság adja meg. Az így keletkező négy erő eredője azonos az eredeti két erő



1. ábra.

eredőjével. Ámde az A_1 ponton támadó $A_1B_1 = P_1$ és $A_1A_2 = Q_1$ erők eredője $A_1C_2 = R_1$ és az A_2 ponton támadó $A_2B_2 = P_2$ és $A_2A_1 = Q_2$ erők eredője $A_2C_1 = R_2$, úgy hogy a C metszéspont valóban pontja az R_1, R_2 erők, vagyis a P_1, P_2 erők P eredőjének.

De még egy második pontot is könnyen találhatunk, a melyik okvetlen benne fekszik az eredő hatásvonalában. Ha Ugyanis az A_1 ponthoz hozzáillesztjük a P_2 erő vektorát ellentett értelemmel ($A_1D_1=B_2A_2$) és az A_2 ponthoz hozzáillesztjük a P_1 erő vektorát ellentett értelemmel ($A_2D_2=B_1A_1$), akkor az A_1D_2 és A_2D_1 összekötő egyenesek D metszőpontja ugyancsak pontja lesz az eredő erő hatásvonalának. A szerkesztés helyességének statikai úton való igazolása velejére nézve ugyanúgy történik, mint az előző esetben.

Ha tehát megszerkesztjük úgy a C, mint a D pontot, akkor a CD összekötő egyenes adja meg az eredő hatásvonalát és mint tüstént látható, a D_2B_2 vonaldarab ábrázolja az eredő vektorát.

A projektiv geometria elemeinek felhasználásával nem csupán azt lehet egyszerűen kimutatni, hogy az eredő erő egyenesének fenti megszerkesztése helyes, hanem azt is, hogy az O, A és C, D pontpárok egymást harmonikusan választják el. A szerkesztésnél fogva ugyanis az A_2 pont felezi a D_2C_2 vonaldarabot, úgy hogy

$$(\infty_2,\ A_2,\ D_2,\ C_2)=-1$$

és így e pontsort az A_1 pontból vetítvén a keletkező sugársorra vonatkozólag ugyancsak

$$(A_1O,\ A_1A_2,\ A_1D_2,\ A_1C_2)=-1.$$

De egyúttal az A_1 pont felezi a D_1C_1 vonaldarabot, tehát

$$(\infty_1,\ A_1,\ D_1,\ C_1)=-1$$

és így e pontsort az A_2 pontból vetítvén, egyúttal

$$(A_2O,\ A_2A_1,\ A_2D_1,\ A_2C_1)=-1.$$

Mivel azonban az A_1, illetőleg A_2 sorozójú projektiv sugársorokban a két egybeeső sugár (A_1A_2 és A_2A_1) egymásnak felel meg, azért a két sugár perspektiv helyzetű is, vagyis a megfelelő sugarak metszéspontjai egy ugyanazon egyenesen feküsznek. Így tehát ki van mutatva, hogy a C, D, O pontok egy egyenesen feküsznek, továbbá az is, hogy

$$(O,\ A,\ D,\ C)=-1.$$

Most még csak azt kell bebizonyítanunk, hogy a C és D pontoktól meghatározott egyenes valóban megadja az eredő erő hatásvonalát. E végre toljuk el a P_1 és P_2 erőket az O pontig, úgy hogy legyen $OE_1 = P_1$, $OE_2 = P_2$ és szerkeszszük meg az erő-parallelogrammát, a melynek átlója (OE) adja meg a P eredőt; azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy az E pont rajta fekszik az előző szerkesztéssel nyert egyenesen. Ez azonban tüstént következik abból, hogy az $E_1A_1C_2$ és $E_2A_2C_1$ háromszögek — mint könnyen igazolható — perspektivek, mert az E_1E_2, A_1A_2, C_2C_1 egyeneseknek van közös metszéspontjuk (S), és így az egymásnak megfelelő oldalak metszéspontjai, vagyis a C, E, O pontok, ugyanazon egyenesen feküsznek.

A fentiekben ismertetett szerkesztés természetesen változatlanul érvényben marad akkor is, ha a P_1 és P_2 erők párhuzamosak, csakhogy ekkor az e_1 és e_2 hatásvonalak O metszéspontja a végtelenben lévén, az O, A, D, C pontok harmonikus volta miatt az A pont felezi a DC távolságot.

A szerkesztéseinkkel nyert idom metrikus tulajdonságait igen egyszerűen állapíthatjuk meg az elemi vektorszámítás alapján. Adva van két vektor:

$$P_1 = \overline{OE}_1 = a_1, \quad P_2 = \overline{OE}_2 = a_2.$$

Ezeknek geometriai összege adja az eredő vektort:

$$P = \overline{OE} = a_1 + a_2 = a.$$

Adva van továbbá az e_1 egyenesen fekvő A_1 pont és az e_2 egyenesen fekvő A_2 pont, úgy hogy

$$\overline{OA}_1 = x_1 a_1, \quad \overline{OA}_2 = x_2 a_2,$$

a hol x_1 és x_2 puszta számértékek.

Határozzuk meg először is az $\overline{OA}$ vektort. Mivel az A pont rajta fekszik az A_1A_2 egyenesen, szért az ábra szerint:

$$\overline{OA} = \overline{OA}_1 + n \,.\, \overline{A_1A}_2 = x_1 a_1 + n\,(x_2 a_2 - x_1 a_1)$$

és mivel az A pont rajta fekszik az OE egyenesen, azért

$$\overline{OA} = x \,.\, a = (a_1 + a_2).$$

A két kifejezés egybevetésével következik, hogy

$$n = \frac{x_1}{x_1+x_2},$$

vagyis hogy az A pont $\frac{x_1}{x_2}$ viszony szerint osztja az A_1A_2 távolságot; továbbá, hogy:

$$x = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}.$$

Határozzuk most meg az $\overline{OC}$ vektort. Az ábrából látnivaló, hogy egyrészről

$$\overline{OC} = \overline{OA}_1+n_1 . \overline{A_1C_2},$$

és másrészről

$$\overline{OC} = \overline{OA}_2+n_2 . \overline{A_2C_1}.$$

Mivel azonban:

$$\overline{A_1C_2} = \overline{OA}_2+\overline{A_2C_2}-\overline{OA}_1 = x_2a_2+a_1-x_1a_1,$$

$$\overline{A_2C_1} = \overline{OA}_1+\overline{A_1C_1}-\overline{OA}_2 = x_1a_1+a_2-x_2a_2,$$

azért

$$\overline{OC} = x_1a_1+n_1(x_2a_2+a_1-x_1a_1) = x_2a_2+n_2(x_1a_1+a_2-x_2a_2).$$

Ámde az $\overline{OC}$ két kifejezésében külön az a_1 és külön az a_2 szorzói egyenlők tartoznak lenni és az így kapott két feltételi egyenletből n_1 és n_2 értéke meghatározható. A számítás elvégzése azt adja, hogy

$$n_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2-1}, \quad n_2 = \frac{x_2}{x_1+x_2-1}.$$

Már most ez értékek felhasználásával azt találjuk, hogy

$$\overline{OC} = y(a_1+a_2) = y . a,$$

a hol

$$y = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2-1}.$$

Ugyanígy az $\overline{OD}$ vektor meghatározására irányuló számítás azt eredményezi, hogy

$$\overline{OD} = z(a_1 + a_2) = za,$$

a hol

$$z = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1}.$$

Ha M a CD távolság felezőpontja és

$$DM = MC = h,$$
$$AM = r,$$
$$OM = \rho,$$

akkor az O, A, D, C pontok harmonikus volta miatt tudvalevőleg

$$\rho = \frac{h^2}{r},$$

a mely képletből az O pont helye számítással meghatározható akkor is, ha az e_1 és e_2 egyenesek nem metsződnek a rajzlapon.

Említsünk fel végül még három egyszerű speciális esetet. Először is legyen $x_2 = -x_1$, ekkor a képleteinkből

$$x = \infty, \quad y = +x_1^2, \quad z = -x_1^2,$$

most tehát az A pont a végtelenben van, vagyis az A_1A_2 egyenes párhuzamos az OE egyenessel és az O pont felezi a CD távolságot.

Másodszor legyen az e_1 és e_2 egyenesek közti hajlásszög 120° és legyen

$$|a_1| = |a_2| = 1,$$

ekkor egyúttal

$$|a| = |a_1 + a_2| = 1,$$

mert a vektorháromszög most egyenlőoldalú háromszög. Ebben a speciális esetben az x_1 és x_2 egyszerűen az OA_1 és OA_2 távolságokat jelentik és a fentiek szerint megszerkesztvén az A, C, D pontokat, az OA, OC, OD távolságok nagyságát közvetetlenül megadják rendre az x, y, z számértékek, úgy hogy most a fenti szerkesztés egyértelmű az x, y, z kifejezések megszerkesztésével.

Ha végre harmadszor $A_1 \equiv E_1$, $A_2 \equiv E_2$, vagyis ha $x_1 = x_2 = 1$, akkor

$$x = \tfrac{1}{2}, \quad y = 1, \quad z = \tfrac{1}{3},$$

úgy hogy mostan az A pont az OE átló felező pontja, $C \equiv E$ és a D pont az OE_1E_2 háromszög területének súlypontja.

Teljesség kedvéért megjegyezzük még azt, hogy az eredő erő fenti megszerkesztése akkor is helyes, ha

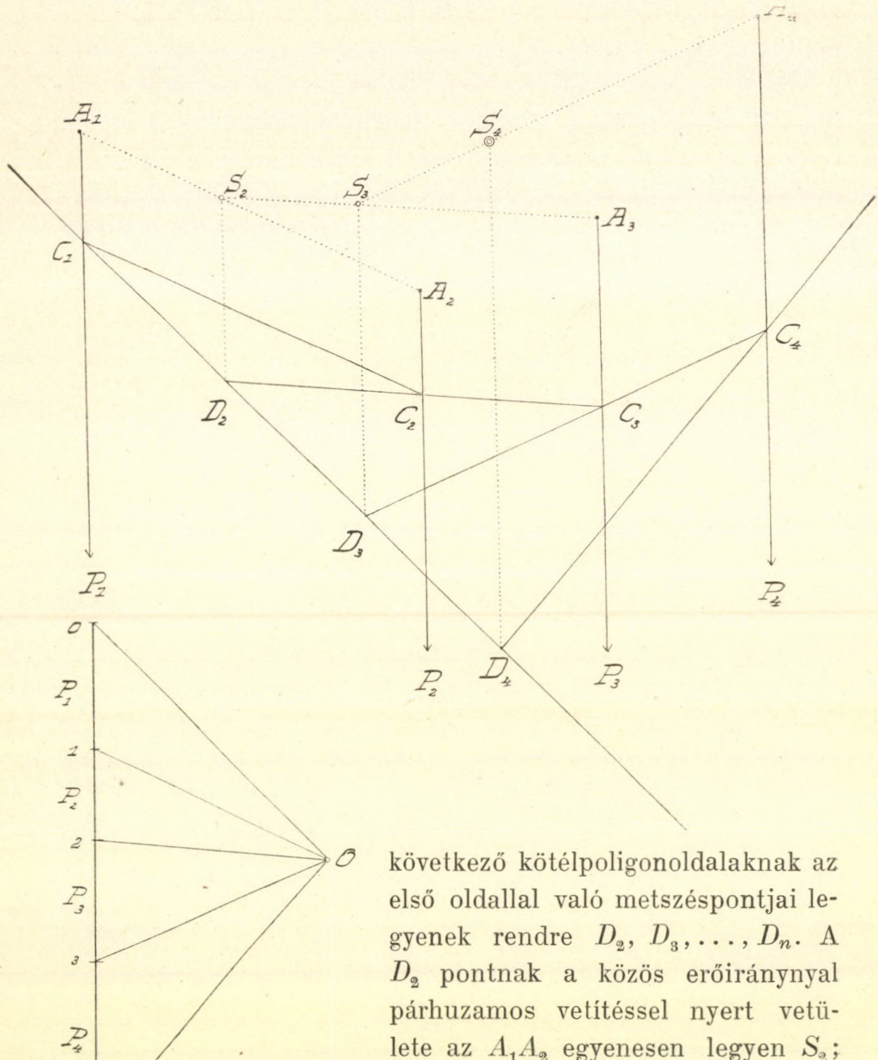
$$A_1C_1 = \lambda P_2, \quad A_2C_2 = \lambda P_1,$$

a hol λ tetszésszerinti pozitiv számot jelent.

A $\lambda = \infty$ esetben, mint tüstént látható, a C és D pontok összeesnek az O ponttal.

II.

A síkban megadott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokban támadó P_1, $P_2, \ldots, P_n$ párhuzamos erők S középpontja — mint ismeretes — a síknak az A_i pontok helyétől és a P_i erők relativ nagyságától meghatározott ama pontja, melyen mindig átmegy az A_i pontokban támadó párhuzamos P_i erők R eredőjének hatásvonala, bárminő legyen is a közös erőirány. E pont megszerkesztésére a grafikus statika azt a közvetetlenül kinálkozó eljárást adja, hogy felvéve az erőket először is egy bizonyos irányban, rájok erőpoligont és kötélpoligont rajzolva, meghatározzuk az eredő erő hatásvonalát; azután az erőket egy második irányban (rendesen az elsőre merőlegesen) véve fel, megint meghatározzuk az eredő hatásvonalát erőpoligon és kötélpoligon rajzolásával; az így kapott két hatásvonal metszéspontja lesz a keresett S középpont. Ehhez az eljáráshoz tehát két különböző irányú erőrendszerre rajzolt két kötélpoligonra van szükség. Lehet azonban úgy is berendezni a szerkesztést, hogy csupán egy kötélpoligon megadja már a keresett pontot. (2. ábra.) Vegyünk fel ugyanis az A_i pontokban támadó P_i erőket egy bizonyos irányban és rajzoljunk rájuk erőpoligont és ennek alapján kötélpoligont $(C_1C_2C_3 \ldots C_n)$. Az egymásra



2. ábra.

következő kötélpoligonoldalaknak az első oldallal való metszéspontjai legyenek rendre D_2, $D_3, \ldots, D_n$. A D_2 pontnak a közös erőiránynyal párhuzamos vetítéssel nyert vetülete az A_1A_2 egyenesen legyen S_2; a D_3 pont vetülete az S_2A_3 egyenesen legyen S_3 és így tovább; végre a D_n pont vetülete az $S_{n-1}A_n$ egyenesen legyen S_n, ekkor ez a pont lesz a párhuzamos erők keresett S középpontja. A szerkesztés helyessége tüstént következik abból, hogy a kötélpoligon ismeretes tulajdonságainál fogva az S_2 pont a P_1 és P_2 erőknek középpontja, az S_3 a P_1, P_2, P_3 erőknek középpontja és így tovább. A közölt szerkesztő eljárás természetesen alkalmazható a síkidomok súlypontjának grafikus meghatározására és a merev testet megtámadó tetszőleges térbeli erőrendszernek két erővel való helyettesitésére.

Ifj. Szily Kálmán.

ÚJ MODSZER
A TÉRBELI ALAKZATOK ÁBRÁZOLÁSÁRA.

(Második közlemény.)

VI.

Az egyenes síksor és az egyenes pontsor.

A pont ábrázolását vizsgálva, rámutattam arra a duális kapcsolatra, mely az egymáshoz egy bizonyos nullrendszerben konjugált egyenesek, illetve sík és pont között az ábrázolást illetőleg fönnáll. Miután előzőleg megadtam az egyenes és a sík egymásban fekvésének kritériumát, az egyenes és a pont egymásban fekvésének kritériuma nyilvánvaló. Annak, hogy az a egyenes és az A pont egymásban feküdjenek, szükséges és elegendő föltétele, hogy $a^{\star}$ lévén az a-hoz konjugált egyenes nyompontja, az A egyenes az a kúpszeletnek az $a^{\star}$ és $\bar{A}$ pontok meghatározta szelője (érintője) legyen.[1]

Az egyenest mint síksort e szerint az a kúpszeleten kívül az $\bar{a}$ pont, mint pontsort az $a^{\star}$ pont jellemzi közelebbről. A sík és pont közötti dualitás szempontjából czélszerű ennélfogva az egyenest mint térelemet két duális téralakzatra: egyenes síksorra és egyenes pontsorra szétbontani és az egyenes siksort az $\bar{a}$ pontkúpszelet, az egyenes pontsort pedig az $a^{\star}$ pontkúpszelet által ábrázolni. Annak a föltétele, hogy egy-

[1] Az egyenes és sík, ill. egyenes és pont egymásban fekvésére adott kritériumok az u egyenesen átmenő síkokra, ill. az u egyenesen fekvő pontokra nem alkalmazhatók.

egy pontkúpszelet által ábrázolt síksor és pontsor egymásban feküdjenek, vagyis tartójuk közös legyen, kézenfekvő.

Az olyan konstruktiv feladatoknál, melyekben ugyanazon egyenes mint síksor és egyszersmind mint pontsor tartója szerepel, czélszerű az egyenest az $\underline{a}$ kúpszelet, az $\bar{a}$ és az $a^\star$ pontok által ábrázolni.

VII.

Sík és pont egymásban fekvésének kritériuma.

Mi a szükséges és elegendő föltétele annak, hogy az $\bar{\underline{a}}$ pontegyenes által ábrázolt a sík és az $\bar{\underline{A}}$ pontegyenes által ábrázolt A pont egymásban feküdjenek?

Válaszszuk ki egyelőre a triviális eseteket. A sík és a pont mindenesetre egymásban feküsznek, ha:

1. $\bar{a} \equiv \bar{A}$;
2. $\underline{a} \equiv \underline{A}$ és átmegy U-n;
3. $\underline{a} \equiv u$ és $\underline{A}$ átmegy $\bar{a}$-n;
4. $\underline{A} \equiv u$ és $\underline{a}$ átmegy $\bar{A}$-n.

A sík és a pont semmiesetre sem feküsznek egymásban, ha $\underline{a} \equiv \underline{A}$ nem megy át U-n és $\bar{a} \not\equiv \bar{A}$; továbbá, ha $\underline{a}$, illetve $\underline{A} \equiv u$ és $\underline{A}$, illetve $\underline{a}$ nem megy át $\bar{a}$-n, illetve $\bar{A}$-n.

Annak, hogy az a sík és az A pont egymásban feküdjenek, szükséges és elegendő feltétele, hogy létezzék egy egyenes, mely az a síkban fekszik és az A ponton átmegy. Kizárom azt az esetet, midőn az a sík az u egyenesen megy át, vagy az A pont az u egyenesen fekszik. Akkor az illető egyenest ábrázoló $\bar{\underline{a}}$ és $a^\star$ pontkúpszeletek $\underline{a}$ kúpszelete átmegy az $\bar{a}$, $\bar{A}$, I_1 és I_2 pontokon és az $\underline{a}$ és $\underline{A}$ egyeneseket még az $\bar{a}$ és $a^\star$ pontokban metszi; az $\bar{a}a^\star$ szelő (érintő) az U ponton megy át. Tekintetbe véve az a-ban fekvő és A-n átmenő egyenesek összeségét, a kritérium a következőképen alakul:

Ahhoz, hogy a nem az u egyenesen átmenő a sík és a nem az u egyenesen fekvő A pont egymásban feküdjenek, szükséges és elegendő, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{A}$ egyeneseknek bármely

U-n átmenő egyenessel való metszéspontjai, az $\bar{a}$, $\bar{A}$, I_1 és I_2 pontok egy kúpszeleten feküdjenek.[1]

Az 1. és 2. alatt felsorolt esetekben az adott kritérium triviális.

VIII.

A metrikus kiválasztás.

A komplex térrel dolgozván, az ábrázolás szingularitásait csak részben redukálhatom. A konstruktiv alkalmazásban azonban csak a valós térrel dolgozom; érdekem tehát, hogy az ábrázolás legveszedelmesebb szingularitásait képzetesekké tegyem; ügyelve mindenesetre arra, hogy a valós térelemek ábrázolásának realitása biztosíttassék. Elérem ezt, ha az ábrázolásra valós, de elliptikus jellegű lineáris kongruencziát és valós képsíkot alkalmazok, és U pontul a képsíkban fekvő u kongruencziaegyenes egy valós pontját választom. Ha pedig e mellett a kongruencziát úgy adom meg, hogy az u egyenes a π sík végtelenben fekvő egyenese, az I_1 és I_2 pontok pedig a π sík képzetes körpontjai legyenek, akkor az egyenest ábrázoló pontkúpszeletek kúpszeletei körök, illetőleg kör elfajulásai: a mi ismét a szerkesztések technikai kivitele szempontjából előnyös.

Fölteszem, hogy valós és elliptikus kongruencziát és valós U pontot alkalmaztam a valós térnek a valós π síkon való ábrázolására; a mellett a kongruencziát úgy választottam, hogy az I_1 és I_2 pontok a π sík képzetes körpontjai legyenek. Miként alakul a térelemek ábrázolása és hogyan hangzanak az egymásban fekvés kritériumai?

A valós tér minden síkját és minden pontját a képsík egy-egy valós pontegyenese ábrázolja. Viszont azon pontegyenesek kivételével, melyeknek pontja a végtelenben fekszik, egyenese

[1] A kritérium szűkebben is fogalmazható; fölösleges ugyanis az összes az U-n átmenő egyeneseket tekintetbe venni; elegendő egy, u-val össze nem eső, az $\bar{a}$ és $\bar{A}$ pontegyenesekhez nem speciális fekvésű egyenes.

ellenben nem, a képsík minden valós pontegyenese egy meghatározott valós síkot és egy meghatározott valós pontot ábrázol.

Az egyenes síksort és az egyenes pontsort általában valós pontkörök ábrázolják. Az egyenes síksort ábrázoló pontkör pontja az egyenesnek, az egyenes pontsort ábrázoló pontkör pontja pedig az egyeneshez a nullrendszerben konjugált egyenesnek a nyompontja. A két pontkör közös körének a pontkörök pontjait összekötő szelője (érintője) az U irányban halad.

Az adott módon nem ábrázolhatók és ebben az értelemben szingulárisak a következő egyenes sík- és pontsorok:

1. A képsík u állása, mint sík- és mint pontsor.
2. A képsíkban fekvő egyenesek mint síksorok.
3. Az U irányban haladó egyenesek, mint pontsorok.

A következő egyeneseknél az ábrázoló pontkörök körei szétesnek:

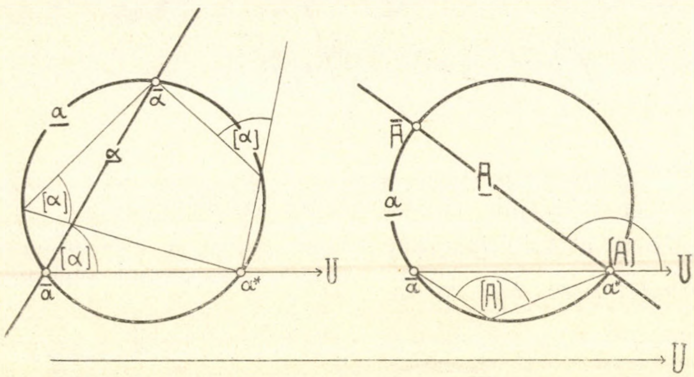
1. A lineáris kongruenczia egyeneseinél; a körök nullakörök, melyeknek pontreprezentásai az egyenesek nyompontjai.

2. A képsíkkal párhuzamos egyeneseknél; a körök egy-egy végesben fekvő egyenesből és az u állásból összetett egyenespárok. Ugyanazon egyenest mint síksort és mint pontsort ábrázoló pontkörök pontjai irányok, melyek az U irányra és az egyenespár végesben fekvő egyenesének irányára nézve antiparallel fekvésűek.

Az egyenes síksor illetőleg pontsor és egyes síkok és pontok az adott módon ábrázoltatván, könnyen meghatározható, vajjon valamely pontegyenes által ábrázolt sík, illetve pont valamely pontkör által ábrázolt síksorban, illetve pontsorban tartalmaztatik-e vagy sem. Ismervén másrészt az egyszerű összefüggést, mely közös tartójú egyenes sík- és pontsorok képei közt fönnáll, egyenes és sík, illetve egyenes és pont egymásban fekvését akkor is ellenőrizhetjük, ha az egyenest mint pont-, illetve mint síksort ábrázoltuk.

Az 1. ábrán az egymásban fekvő a egyenest és α síkot, a 2. ábrán az egymásban fekvő a egyenest és A pontot ábrázoltam.

Az α sik és az A pont egymásban fekvésének kritériuma, hogy az $\bar{\alpha}$ és $\bar{A}$ pontok és bármely U irányú egyenesnek az $\bar{\alpha}$ és $\underline{A}$ egyenesekkel való metszéspontjai egy körön feküdjenek. Az igy fogalmazott kritérium csupán a következő triviális esetekben nem alkalmazható: 1. ha $\underline{\alpha} \equiv \underline{A}$ és $\bar{\alpha} \equiv \bar{A}$ (α és A egymásban feküsznek vagy nem feküsznek egymásban, a szerint, a mint az $\underline{\alpha} \equiv \underline{A}$ egyenes iránya U vagy sem); 2. ha $\underline{\alpha} \equiv u$ vagy ha $\underline{A} \equiv u$. Minden más esetben a kritérium alkalmazható.



1. és 2. ábra

A kritériumot többféleképen alakithatjuk át. Ha az $\underline{\alpha}$ és $\underline{A}$ egyenesek végesben találkoznak, akkor az egymásban fekvés szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\bar{\alpha}$ és $\bar{A}$ pontokon és az $\underline{\alpha}$ és $\underline{A}$ egyenesek metszéspontján átmenő körhöz a metszéspontban fektethető érintő iránya U legyen. (A kritérium sztereometriai jelentése, hogy legyen olyan a nullarendszerben önmagához rendelt egyenes, mely az α síkban fekszik és az A ponton megy át.)

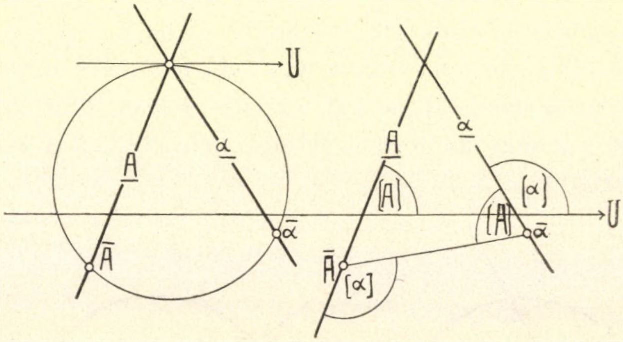
A kritérium más fogalmazásai:

Az $\underline{\alpha}$ és $\underline{A}$ egyenesek az $\bar{\alpha}\bar{A}$ egyenes irányára és az U irányra nézve antiparallelák.

Az $\bar{\alpha}\bar{A}$ egyenes és az $\underline{A}$ egyenesektől bezárt szög egyenlő az $\underline{\alpha}$ egyenes és az U irány alkotta szöggel.

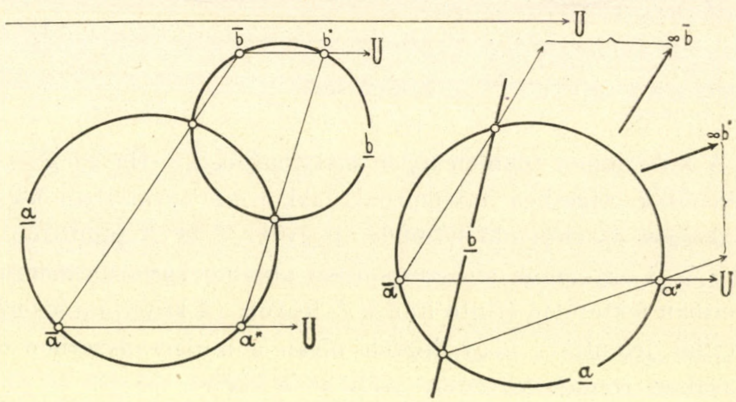
Az $\bar{A}\bar{a}$ egyenes és az $\underline{a}$ egyenesektől bezárt szög egyenlő az $\underline{A}$ egyenes és az U irány alkotta szöggel.

Ha a síkot mint pontjai összeségét, a pontot mint síkjai



3. ábra.

összeségét tekintjük, az összeségnek az ábrázolásban való áttekintésére a kritérium két utolsó alakja a legalkalmasabb. A kritériumnak eme fogalmazásai egyszersmind rámutatnak



4. ábra.

arra, hogy a sík és a pont az eddigitől eltérő módon, az $\bar{a}$ ponttal és az $[a]$ szöggel, illetve az $\bar{A}$ ponttal és az $[A]$ szöggel is czélszerűen ábrázolhatók. Egyenes és sík, illetve egyenes és pont egymásban fekvésének föltételei is használhatóan alakulnak akkor is, ha a síkot, illetve pontot ponttal és szöggel ábrázoljuk (l. 1. és 2. ábra).

A kritérium alkalmazását különböző alakjaiban a 3. ábrán szemléltetem.

Végre annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy két egyenes egy ugyanazon síkon feküdjék, vagyis hogy egymást végesben vagy végtelenben messe, akár a sík és egyenes, akár pedig a pont és egyenes egymásban fekvésének föltételéből könnyen leszármaztatható. Egy síkban fekvő egyeneseket a 4. ábrán ábrázolok.

IX.

A konstruktiv alapfeladatok.

A következőkben azokat a szerkesztéseket vizsgálom, melyek a térelemek egymásban fekvésére vonatkozó stereometriai alapfeladatoknak az ábrázolásban megfelelnek. A szinguláris eseteket nem tárgyalom; ezekben az adandó szerkesztések többé-kevésbbé módosulnak; a szükséges módosítások az előző diszkusszió alapján könnyen megadhatók.

I. feladat. Két adott sík, α és β, metszésvonala keresendő.

A keresett egyenest, mint síksort ábrázoló pontkör pontja az $\underline{\alpha}$ és $\underline{\beta}$· egyenesek metszéspontja; a pontkör köre e metszésponton és az $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$ pontokon megy keresztül.

II. feladat. Két adott ponton, A-n és B-n át egyenes fektetendő.

A keresett egyenest, mint pontsort ábrázoló pontkör pontja az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ egyenesek metszéspontja; a pontkör köre ezen metszésponton és az $\bar{A}$ és $\bar{B}$ pontokon megy keresztül.

III. feladat. Határoztassék meg az α sík és az a egyenes metszéspontja.

A keresett A pontot ábrázoló $\underline{\bar{A}}$ pontegyenes $\bar{A}$ pontja az $a^{\star}$ és $\bar{\alpha}$ pontokon és az $\underline{\alpha}$ és $\bar{\alpha}a^{\star}$ egyenesek metszéspontján átmenő körnek az $\underline{a}$ körrel való második metszéspontja. A pontegyenes $\underline{A}$ egyenese a két kör közös húrja.

IV. feladat. Az A ponton és az a egyenesen át sík fektetendő.

A keresett α síkot ábrázoló $\underline{\bar{\alpha}}$ pontegyenes $\bar{\alpha}$ pontja az $\bar{a}$ és $\bar{A}$ pontokon és az $\underline{A}$ és $\bar{a}a^{*}$ egyenesek metszéspontján átmenő körnek az $\underline{a}$ körrel való második metszéspontja. A pontegyenes $\underline{\alpha}$ egyenese a két kör közös húrja.

V. feladat. Meghatározandó két egymást metsző egyenes, a és b metszéspontja.

A keresett pontegyenes egyenese az $a^{*}b^{*}$ egyenes; pontja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ köröknek az egyenesen fekvő metszéspontja.

VI. feladat. Két egy síkban fekvő egyenesen, a-n és b-n át sík fektetendő.

A keresett pontegyenes egyenese az $\bar{a}\bar{b}$ egyenes; pontja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ köröknek az egyenesen fekvő metszéspontja.

A térelemek egymásban fekvésére vonatkozó összetettebb feladatok a fölsorolt alapfeladatokra vezethetők vissza. Megjegyzem azonban, hogy a térbeli szerkesztések szolgai ábrázolása nem mindig szükséges; például ott, a hol közös tartójú projektiv egyenes sík- vagy pontsorok lépnek föl, az egyenes sort ábrázoló pontkör köre közvetlenül előnyösen felhasználható.

X.

A konstruktiv ábrázolás.

Az előző fejezetben föltettem, hogy azok a térbeli alakzatok, melyekkel szerkesztettem, képeikkel vannak megadva, és a szerkesztéseket is csak képben végeztem. Kérdés még, hogy miképen jutunk az eredeti térbeli alakzattól a képhez és viszont a képtől az ábrázolt térbeli alakzathoz? Mind a két kérdést elvben ugyan már elintéztük, de hátra van még a konstruktiv kivitel.

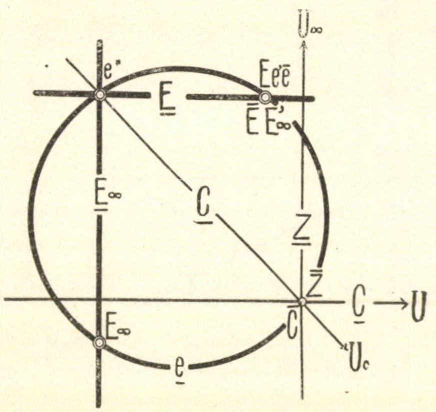
Feladatomat szűkebben és szabatosabban fogalmazom és azt kérdezem: A térelemek középponti vetítésben való ábrázolásáról miképen térhetünk át a tárgyalt ábrázolásra; és viszont, a térelemek az adott módon lévén ábrázolva, miképen térhetünk át a középponti vetítésre?

A képsík, a lineáris kongruenczia és a vetítési középpont kölcsönös helyzetét illetőleg még bizonyos megszorításokat teszek, melyek nem lényegesek; csupán a technikai kivitelt teszik kényelmesebbé.

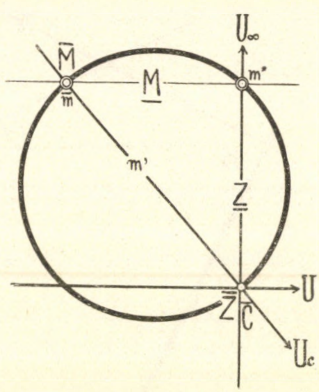
A kongruencziát úgy választom, hogy

1. a C vetítési középpontból a π képsíkra bocsátható merőleges egyenes a kongruencziához tartozzék;

2. hogy a tér amaz involutorikus kollineácziójában, mely a kongruenczia egyeneseit önmagukhoz rendeli, a π képsíknak a végtelenben fekvő sík feleljen meg.



5. ábra.



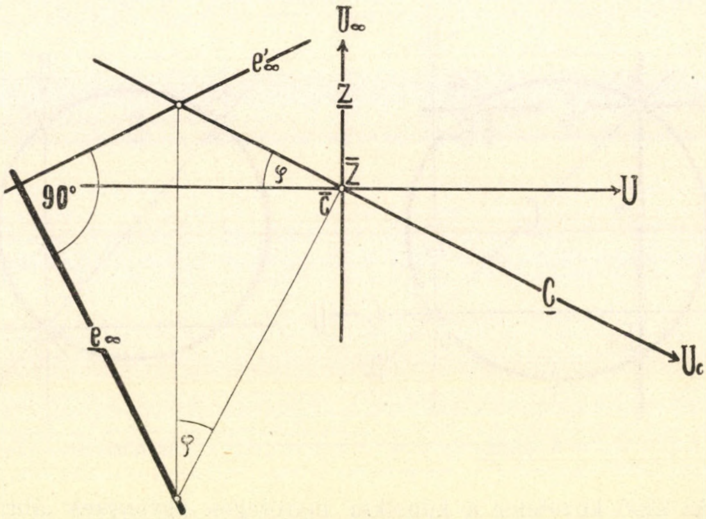
6. ábra.

Az első követelés a képsíkra merőleges egyenesek ábrázolását teszi kényelmessé. A második követelés azt eredményezi, hogy a nullarendszerben a képsíkhoz és a végtelenben fekvő síkhoz konjugált U és U_∞ irányok egymásra merőlegesek; a mi ismét az egyenes nyom- és iránypontjának, illetve a sík nyom- és irányvonalának az ábrázolásban való felhasználását megkönnyíti.

Ha még megadom a vetítési középponton át a képsíkkal párhuzamosan fektetett síkhoz a nullarendszerben konjugált U_C irányt, a nullarendszert és vele a lineáris kongruencziát egyértelműen meghatároztam. Az U_C irányt a képsík u állásán az U és U_∞ irányoktól eltérően, egyébként tetszésszerint választhatom. Czélszerű az U_C irányt úgy választani, hogy az

U és U_∞ irányokkal 45°-ú szöget zárjon be; a 7. ábra kivételével, mint a melyen a legalkalmasabb példán az U_C irány választásának az ábrázolásra gyakorolt befolyását emelem ki, az U_C irányt az említett módon választom.

A térelemek képeinek szerkesztésénél bizonyos síkokat, pontokat és egyeneseket használok fel, melyeknek képei részben meg vannak adva, részben az általános helyzetűeknél könynyebben szerkeszthetők. Ezek:



7. ábra.

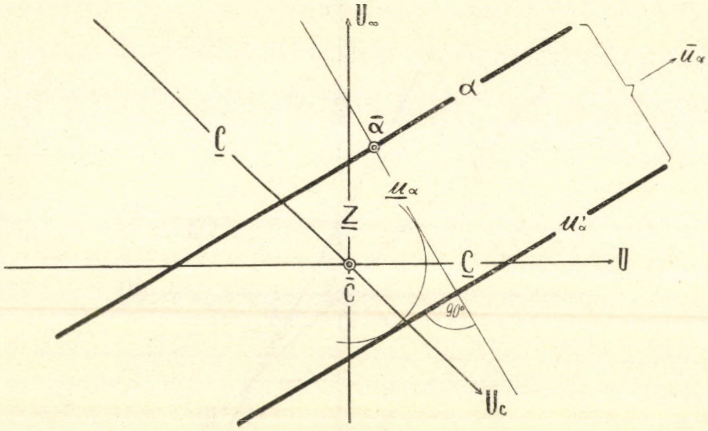
1. A képsík, a végtelenben fekvő sík és a vetítés középpontján át a képsíkkal párhuzamosan fektethető sík. Az ábrázoló pontegyenesek egyenese a képsík u állása, pontjai az U, U_∞ és U_C irányok.

2. A képsík pontjai. Az ábrázoló pontegyenesek pontjai az eredeti pontok; a pontegyenesek egyenesei az U irányban haladnak.

3. A vetítés középpontja C. Az ábrázoló $\underline{C}$ pontegyenes $\overline{C}$ pontja a C pontnak a képsíkra való derékszögű vetülete; a $\underline{C}$ egyenes iránya U_C.

4. A képsíkra merőleges egyenesek iránya Z. Az ábrázoló $\underline{Z}$ pontegyenes $\overline{Z}$ pontja a $\overline{C}$ ponttal esik össze; a $\underline{Z}$ egyenes egyenes iránya U_∞.

5. A vetítés középpontján átmenő egyenesek. Az egyenesek középponti vetületei az egyenesek nyompontjai. Az egyenest mint pontsort ábrázoló $\underline{e}^*$ pontkört meghatározzák a vetítési középpontot és az egyenes E nyompontját ábrázoló $\underline{C}$ és $\underline{E}$ pontegyenesek. Az egyenes nyompontja $\bar{e} \equiv E \equiv \overline{E} \equiv e'$ (5. ábra).



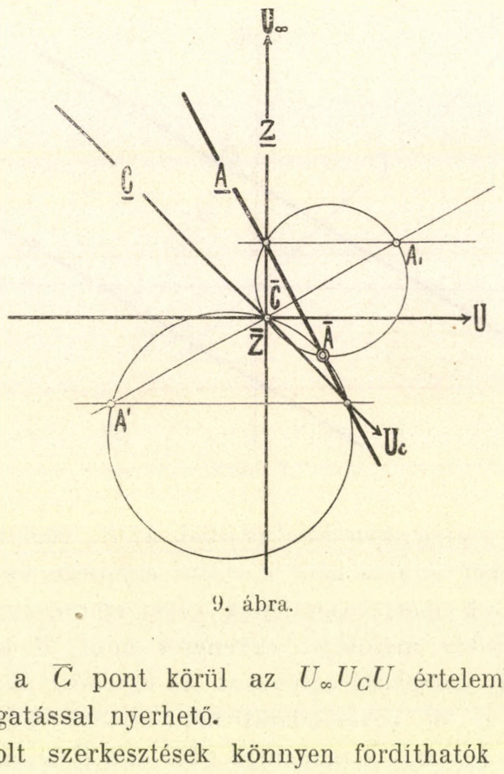
8. ábra.

6. A tér végtelenben fekvő pontjai. Az E_∞ végtelenben fekvő pont $\overline{E}_\infty$ képét mint a pont e vetítő egyenese és a végtelenben fekvő sík metszéspontjának képét szerkesztem (5. ábra).

7. A képsíkra merőleges egyenesek mint M nyompontjuk és a Z irány összekötő egyenesei. Az egyenest ábrázoló pontkörök köre az $M\overline{C}$ egyenesdarab mint átmérő fölé rajzolt kör; a konjugált egyenes nyompontja a kör és a $\underline{Z}$ egyenes metszéspontja (6. ábra).

8. A tér végtelenben fekvő egyenesei, pl. e_∞ (7. ábra). Az $E'_\infty \overline{C} \overline{E}_\infty$ háromszög (5. ábra) $\overline{C}$-ben derékszögű és valamennyi végtelenben fekvő pontra hasonló és hasonló értelmű. Az $\underline{e}_\infty$ egyenes ennélfogva merőleges az e'_∞ egyenesre. A $\overline{C}$ pontnak az e'_∞ és $\underline{e}_\infty$ egyenesektől való távolságainak viszonya $\operatorname{tg}\varphi$, a

hol φ az U és U_C irányok képezte szög. A 7. ábrán az $\underline{e}_\infty$ egyenes szerkesztésére az e_∞ egyenesnek azt a pontját használom föl, mely a C vetítés középpontjával konjugált $\{C, \underline{C}\}$ síkban fekszik. A 6. és 8. szerkesztések legegyszerűbben akkor végezhetők, ha $\varphi = 45°$, azaz $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Ez esetben $\overline{C}\overline{E}_\infty = \overline{C}\overline{E}'_\infty$ és a $\overline{C}$ pont az $\underline{e}_\infty$ és e'_∞ egyenesektől egyenlő távolságra van. Ennélfogva az E'_∞ pontból az $\overline{E}_\infty$ pont, az e'_∞ egyenesből az



9. ábra.

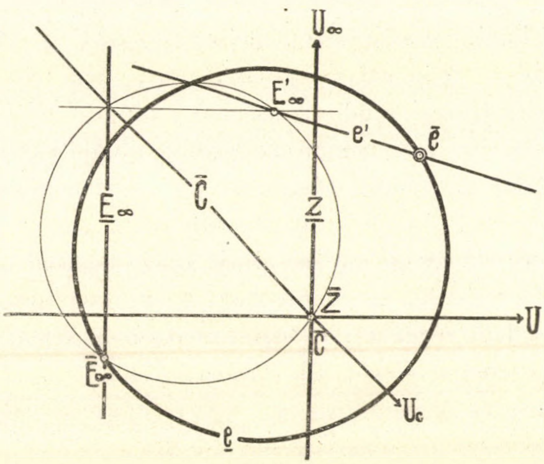
$\underline{e}_\infty$ egyenes a $\overline{C}$ pont körül az $U_\infty U_C U$ értelemben végzett 90°-nyi forgatással nyerhető.

A fölsorolt szerkesztések könnyen fordíthatók meg; megfordításuk az adott ábrázolásról a középponti vetítésre való áttérést szolgáltatja.

Általános helyzetű térelemek ábrázolása és rekonstrukcziója az előző fejezetben adott szerkesztések felhasználásával az 1—8. alatt felsorolt speciális helyzetű térelemek ábrázolására és rekonstrukcziójára vezethető vissza.

A 8. ábrán az általános helyzetű a síkot ábrázolom. A sík $\underline{a}$ nyomvonala és u_a végtelenben fekvő egyenesének u'_a czentrális vetülete által van megadva. Az $\underline{u}_a$ egyenest az u'_a egyenesnek a $\overline{C}$ pont körül az $U_\infty U_C U$ értelemben végzett 90°-nyi forgatása adja. Az $\bar{a}$ pont az $\underline{a}$ és $\underline{u}_a$ egyenesek metszéspontja.

A 9. ábrán az általános helyzetű A pontot ábrázolom. Az A pont középponti és derékszögű vetületei: A' és A_1 által



10. ábra.

van megadva. Az A pontot mint a CA' egyenesnek az A_1-ben a képsíkra merőlegesen állított egyenessel való metszéspontját ábrázolom.

Végre a 10. ábrán az általános helyzetű e egyenes képét szerkesztem. Az egyenes e' középponti vetülete, $\bar{e}$ nyompontja és E_∞ iránypontjának E'_∞ középponti vetülete által van megadva. Az egyenest mint az $\bar{e}$ és $\bar{E}_\infty$ pontokat összekötő egyenest ábrázolom.

Az ábrázolás adott módja és a középponti vetítés közti kapcsolatról elmondottak után könnyen vizsgálható az egyéb vetítési módokkal való kapcsolat is.

Riesz Frigyes.

IDŐMEGHATÁROZÁS FONALHÁROMSZÖGGEL.

Több oldalról — különösen meteorologusok és seismologusok részéről — felmerül a panasz, hogy nem rendelkezünk oly időmeghatározási móddal, melynél a műszer lehetőleg egyszerű legyen, úgy hogy maga az észlelő előállíthassa, a megfigyelés adatainak feldolgozása csak elemi számolásokat követeljen és az eredmény néhány másodperczre pontos legyen.

Ezen követelmények egy részének már megfelel a HARZER-féle fonalháromszög, a mennyiben a műszer összeállítását maga az észlelő végezheti és egyszerűségéhez képest aránylag elég pontos eredményeket ad. HARZER a fonalháromszög összeállítását következőképen irja le:[1] «Egy négyzet négy csúcsában rudakat szúrunk függőlegesen a földbe, melyeket fent négy vízszintes, négyzetet alkotó rúddal kötünk össze. Az így nyert állvány felső vízszintes rúdjainak közepén fonalból hurkot csinálunk vagy fémgyűrűt erősítünk rá. Két szemközt fekvő hurkon, vagy gyűrűn át vékony fehér czérnát huzunk, a melynek két lecsüngő végét összekötjük s egy megfelelő súlyú követ kötünk rá, mely a czérnát közel egyenlőszárú háromszög alakban feszíti ki. A fonalháromszög nyugalmi helyzetében függőleges síkot jelöl ki. Hogy a levegőáramlás a fonalat ne mozgassa, czélszerű a követ vízzel telt edénybe meríteni. A megfigyelés abban áll, hogy szabad szemmel észleljük a csillagok átmenetének idejét a gyengén megvilágított fonalak-

[1] Petermanns geographische Mitteilungen. 1896.
Dr. P. HARZER: Über geographische Ortsbestimmungen ohne astronomische Instrumente.

tól alkotott síkon át.» A gyakorlat azt mutatta, hogy az egyenlítő táján levő, tehát leggyorsabban mozgó csillagok átmenete 4—5 másodperczre pontosan észlelhető.

Ha a fonalháromszög síkja összeesnék a délkör síkjával, egyetlen csillag átmenetének észlelése megadná az időt, általában azonban legalább két csillag átmenetének észlelése szükséges az időmeghatározásra.

Az észlelés feldolgozására szolgáló képletcsoport, a melyet Harzer közöl, igen terjedelmes és nehezen áttekinthető, úgy hogy teljesen ellentétben áll magának a megfigyelésnek egyszerűségével. Sokkal kényelmesebbek a számolásra azok a képletek, melyeket a gömbi csillagászat szolgáltat időmeghatározásra abban az esetben, ha két csillagot észleltünk ugyanazon azimutban.[1] Legyenek a két észlelt csillag coordinátái α, δ, illetve α', δ', az átmenet csillagideje θ és θ', akkor

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} M = \frac{\sin(\delta+\delta')}{\sin(\delta-\delta')} \operatorname{tg} \frac{t-t'}{2} \\ \sin\left(\frac{t+t'}{2} - M\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta'} \sin\left(\frac{t-t'}{2} - M\right) \\ t = \theta - \alpha, \quad t' = \theta' - \alpha'.\end{gathered} \tag{1}$$

Az óraszögek különbsége $t-t'$ ismeretes lévén, $t+t'$ számítható és ezzel θ-t, illetve θ'-t nyerjük. A képletek pontosabb vizsgálatából adódik, hogy az észlelésnek lehetőleg a meridián közelében kell történni és a két csillag declinatiokülönbségének lehető nagynak kell lenni.

Ezek a képletek se elégítik ki azt a követelményt, hogy a számolás elemi legyen, hogy a csillagászati, illetve mathematikai képzettséggel nem biró ember is elbánhasson velük. Lényegesen egyszerűbb az a számolási mód, melyet Fejes Zsigmond — az ó-gyallai csillagda volt adjunctusa — követett, azon megjegyzés alapján, hogy a fonalháromszög oly passageműszernek tekinthető, melynél a tengelyhajlás és a collimatio

---

[1] Brünnow: Lehrbuch der sphärischen Astronomie, pag. 333.

értéke zérus, egyedül az azimutjavítás veendő tekintetbe. A TOBIAS MAYER-féle képlet jelen esetben tehát a következő egyszerű alakot ölti:

$$a = \theta + \Delta\theta - Aa, \tag{2}$$

a hol θ az átmenet óraideje, $\Delta\theta$ az óra állása, a a fonalháromszög síkjának azimutja és A a MAYER-féle azimutcoefficiens

$$A = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}. \tag{3}$$

Ha két csillagot észleltünk, egy egyenlítőit és egyet 50°—60° declinatióval, θ_1 és θ_2 óraidőben, a keresett óraállás:

$$\Delta\theta = \frac{A_1(\alpha_2 - \theta_2) - A_2(\alpha_1 - \theta_1)}{A_1 - A_2}, \tag{4}$$

ha A_1 és A_2 a megfelelő azimutcoefficiensek. A fonalháromszög azimutja pedig:

$$a = \frac{(\alpha_2 - \theta_2) - (\alpha_1 - \theta_1)}{A_1 - A_2}. \tag{5}$$

Ha valamely helyre az azimutcoefficiens δ argumentummal táblázatba van foglalva, a (4) alatti képletben előforduló elemi műveleteken kívül még csak a csillag- és középidőnek egymásba átalakítása szükséges, a csillagok coordinátái az észlelés idejére az évkönyvekből kivehetők.

A kiindulásul szolgáló (2) képlet azonban csak akkor helyes, ha a elég kicsiny, hogy a csillag óraszögét azimutjával arányosnak vehessük. Az azimut és óraszög között a szigorú összefüggést adja a cotangenstétel:

$$\sin t \operatorname{ctg} a = \sin\varphi \cos t - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi. \tag{6}$$

Ebből, ha a kicsiny, t ily alakban állítható elő:

$$t = A_1 a + A_3 a^3 + \cdots, \tag{7}$$

a hol A_1 épen a MAYER-féle együttható és

$$A_3 = A_1 \left\{ \frac{1 - \sin\varphi}{3} - \frac{1}{6} \operatorname{tg}\delta \cos\varphi \right\}. \tag{8}$$

Ha δ nem nagyobb 70°-nál, akkor A_3 értéke nem nagyobb $\frac{1}{3}$-nál és így ha a nem haladja túl a 3—4 fokot, az azimut harmadik hatványa 1 időmásodperczнél kevesebb javítást ad. Berendezhetjük a megfigyelést, mint a passagenál úgy, hogy először észleljük néhány æquatori csillag átmenetét, azután egy sarkhoz közel álló csillagét, végre ismét néhány æquatori csillagot veszünk. A (2) alatti egyenleteket akkor a legkisebb négyzetek elméletének megközelitő alkalmazásával oldjuk meg. Ily módon sikerült FEJES ZSIGMONDnak az időmeghatározás két másodpercz pontossággal, de czélunknak ez az eljárás ép a számolás terjedelmének megnövekedése miatt nem felel meg.

Ha a fonalháromszög síkjának azimutja valamely úton ismeretes, akkor már *egy* csillag átmenetének észlelése elegendő az időmeghatározásra. Az északi félgömbön igen jól felhasználható azimutmeghatározásoknál a sarkcsillag (α Ursæ minoris), a mennyiben sarktávolsága alig több egy foknál s így azimutja az időnek közelitő ismeretével is elég pontosan megállapitható. Lassú mozgása miatt épen nem alkalmas arra, hogy átmenetét észleljük a fonalháromszög síkján, hanem fordítva a fonalháromszöget irányithatjuk rá a sarkcsillagra. Erre a czélra csak mozgathatóvá kell tenni a fonál déli oldalon levő felfüggesztési pontját, úgy hogy a fonal síkjának azimutja lassan változtatható legyen. A fonal és a csillag szerepet cserélnek: a sarkcsillag mozdulatlan és a fonalat mozgatjuk, hogy síkjába jusson a csillag. Ha ily módon a fonalháromszöget ráállítottuk a sarkcsillagra és észleljük egy æquatori csillag átmenetét, akkor — ha egyelőre eltekintünk a sarkcsillag kis elmozdulásától — két csillag átmenetét figyeltük meg ugyanazon időben, ugyanazon azimutban. De ez az idő valamely helyen csak a két csillag coordinátáitól függ. Ugyanis ekkor $\theta = \theta'$ és így

$$t - t' = a' - a, \quad t + t' = 2\theta - a - a',$$

az (1) képletek tehát így alakulnak:

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} M=\frac{\sin(\delta+\delta')}{\sin(\delta-\delta')}\operatorname{tg}\frac{\alpha'-\alpha}{2}\\ \sin\left(\theta-\frac{\alpha+\alpha'}{2}-M\right)=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta'}\sin\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}-M\right)\end{gathered} \tag{9}$$

a θ csillagidő egy megadott csillagpárra csak a földrajzi szélesség függvénye. Mivel egyik csillagnak a sarkcsillagot veszszük, mondhatjuk, hogy valamely æquatori csillagra az az idő, melyben a sarkcsillaggal ugyanazon azimutban áll, csak φ függvénye és így φ argumentummal táblázatba foglalható. A számolás czéljaira a (9) képlet még átalakítható, ha bevezetjük a sarkcsillag coordinátáit α_0-t és declinatiója helyett polustávolságát p_0-t. A (9) első képletéből:

$$\operatorname{tg} M=k\operatorname{tg}\frac{\alpha-\alpha_0}{2},\quad k=\frac{1+\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}p_0}{1-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}p_0}$$

és mivel k kevéssel különbözik az egységtől, M így állítható elő:

$$M=\frac{\alpha-\alpha_0}{2}+\frac{k-1}{k+1}\cdot\sin(\alpha-\alpha_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\sin 2(\alpha-\alpha_0)+\cdots$$

azaz

$$\begin{gathered}M=\frac{\alpha-\alpha_0}{2}+\varepsilon,\quad \varepsilon=\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}p_0\sin(\alpha-\alpha_0)+\\ +\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\delta\operatorname{tg}^2p_0\sin 2(\alpha-\alpha_0)+\cdots\end{gathered} \tag{10}$$

A (9) második egyenlete, mely θ-t adja, így alakul:

$$\sin(\alpha-\theta+\varepsilon)=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}p_0\sin(\alpha-\alpha_0+\varepsilon) \tag{11}$$

(10) és (11) képletekkel már a számolás elég kényelmes.

Az I. táblázatban találjuk az így számolt θ értékeit 20 æquatormenti körülbelül egyenletesen elosztott csillagra, 45°-tól 50°-ig terjedő földrajzi szélességértékekre, a mely határok megfelelnek Magyarország területének. A csillagoknál az 1908.0-ra vonatkozó középhely coordinátáit vettem alapul s így a táblázat, ha a coordináták változása miatt nem javítjuk, csak 1908 elejére érvényes.

A táblázatból vett átmeneti idő azonban két okból javításra szorul. Először azért, mert a sarkcsillag beállításától az æquatori csillag átmenetéig terjedő idő alatt a sarkcsillag is elmozdult s így nem érvényes az a feltevésünk, hogy a két csillag ugyanazon időpontban volt ugyanazon azimutban. Legyen a sarkcsillag beállításának ideje θ_1 és az æquatori csillag átmenetének ideje θ_2, akkor ha az időközt $\theta_2 - \theta_1$ et ϑ-val jelöljük, a szigorú megoldást adó képletek a következők:

$$\operatorname{tg} M = k \operatorname{tg}\left(\frac{a-a_0}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right) \tag{12}$$
$$\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{a+a_0}{2} - M\right) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} p_0 \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{a-a_0}{2} - M\right)$$

Ha a ϑ elhanyagolásával számolt értékeket $\overline{M}$, $\bar{\theta}$-sal jelöljük és írjuk:

$$M = \overline{M} + \Delta M, \quad \theta_2 = \bar{\theta} + \Delta\theta,$$

akkor épen $\Delta\theta$ a keresett javitás, melyet a táblázatból vett értékhez kell adnunk.

(12) első egyenletéből másodrendű tagok elhagyásával adódik:

$$\Delta M = -k\left(\frac{\cos\overline{M}}{\cos\frac{a-a_0}{2}}\right)^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{13}$$

és tekintetbe véve, hogy

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \theta_2 - \frac{\vartheta}{2} = \bar{\theta} + \Delta\theta - \frac{\vartheta}{2}$$

a (12) második egyenletéből:

$$\Delta\theta = \frac{\vartheta}{2} + \Delta M - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} p_0 \frac{\cos\left(\frac{a-a_0}{2} + \overline{M}\right)}{\cos\left(\bar{\theta} - \frac{a+a_0}{2} - \overline{M}\right)}\left(\frac{\vartheta}{2} - \Delta M\right). \tag{14}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$P = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} p_0 \frac{\cos\left(\frac{a-a_0}{2} + \overline{M}\right)}{\cos\left(\bar{\theta} - \frac{a+a_0}{2} - \overline{M}\right)}; \quad Q = k\left(\frac{\cos\overline{M}}{\cos\frac{a-a_0}{2}}\right)^2, \tag{15}$$

akkor

$$\Delta\theta = \frac{\vartheta}{2}[1-Q+P(1+Q)],$$

vagy ha ϑ-t perczekben adjuk meg és $\Delta\theta$-t másodperczekben számoljuk:

$$\Delta\theta^{sec} = 30\,[1-Q+P(1+Q)]\,\vartheta^{min} \tag{16}$$

P és Q kiszámitása, ha bevezetjük a már definiált ε correctió-mennyiséget, a következő képletekkel történhetik:

$$P = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} p_0 \frac{\cos(\alpha-\alpha_0+\varepsilon)}{\cos(\alpha-\theta+\varepsilon)} \tag{17}$$

$$Q = [1+2\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} p_0 + 2\operatorname{tg}^2\delta \operatorname{tg}^2 p_0 + \cdots]\left[1-\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right]^2 \cos^2\varepsilon,$$

a melyekben a szükséges pontosság foka szerint még további egyszerűsítések léphetnek fel $\big(\cos(\alpha-\theta+\varepsilon)=1,\ \cos\varepsilon=1,$ $\operatorname{tg}\varepsilon=\varepsilon$ stb.$\big)$.

Az I. táblázat adja minden θ érték mellett a hozzá tartozó

$$C = 30\,[1-Q+P(1+Q)] \tag{18}$$

szorzó értékét, úgy hogy ha ϑ a sarkcsillag beállításától az æquatori csillag átmenetéig eltelt időköz, $C\vartheta$ adja a sarkcsillag elmozdulása miatt a θ-hez teendő javítást. Ez a correctio természetesen zérus oly csillagoknál, melyeknek delelésekor a sarkcsillag legnagyobb digressióban van (α Canis minoris és α Aquilæ), legnagyobb értéke 1·90. Némi gyakorlattal elérhető, hogy ϑ ne legyen több 10 percznél, s akkor a javítás maximuma 19 másodpercz.

Másik javítás a csillagok coordinátáinak változása miatt szükséges. Az itt tekintetbe jövő változások a præcessio és az évi aberratio; előbbi a coordináták egyirányú, utóbbi évenként periodikusan ismétlődő változása, tehát tekintetbe vételük két, egymástól független táblázattal lehetséges.

Legyenek $d\alpha$, $d\delta$, $d\alpha_0$, dp_0 a megfelelő coordináták változásai, akkor az átmeneti idő javítása $d\theta$, adódik (11)-ből:

$$d\theta = da + d\varepsilon + P(da_0 - da - d\varepsilon) - \operatorname{tg}(a - \theta + \varepsilon)\frac{2dp_0}{\sin 2p_0}, \tag{19}$$

a hol $d\varepsilon$ (10)-ből:

$$\begin{aligned} d\varepsilon = (\operatorname{tg} p_0 \sec^2\delta d\delta + \operatorname{tg}\delta \sec^2 p_0 dp_0)\sin(a - a_0) + \\ + \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} p_0 \cos(a - a_0)(da - da_0) + \cdots \end{aligned} \tag{20}$$

Vegyük először tekintetbe a præcessio miatt fellépő javítást. Az æquatori csillagok coordinátáinak változása egy év alatt:

$$\begin{aligned} \varDelta a &= 46''\!.0 + 20''\!.1 \operatorname{tg}\delta \sin a \\ \varDelta \delta &= 20''\!.1 \cos a \end{aligned} \tag{21}$$

és ez a változás igen hosszú ideig évenként állandónak vehető. Nem olyan egyenletes már a sarkcsillag coordinátáinak változása, de a linearitástól való eltérés csak egy század mulva adna tekintetbe veendő javítást. A számítást 1908-ra vonatkozó értékekkel végeztem; azaz:

$$\varDelta a_0 = 26^s\!.9, \quad \varDelta p_0 = -18''\!.7.$$

Az így nyert egy év alatti változása θ-nak az I. táblázatban $\varDelta\theta_1$ oszlopban található. Ez a javítás egyrészt arra szolgál, hogy az 1908 elejére érvényes θ értékeket valamely következő év elejére átszámoljuk; másrészt, hogy egy éven belül is legalább hozzávetőleg az átmeneti időt a præcessio miatt javítsuk. Ez utóbbi javítás egy negyedévre legfeljebb egy másodpercz.

Az évi aberratio következtében a középhelytől való eltérést rectascensióban és declinatióban elegendő pontossággal adják a mi céljainkra a következő képletek:

$$\begin{aligned} da &= 1^s\!.3 \sin(H + a)\sec\delta \\ d\delta &= 20'' \cos(H + a)\sin\delta, \end{aligned} \tag{22}$$

a hol H a Nap hosszától függő szög.[1] Mivel az aberratio miatt fellépő javítás maximuma 3 másodpercz, azaz az észlelés pontosságával egyenlőrendű mennyiség, talán teljesen mellőz-

[1] Berliner Astronomisches Jahrbuch.

hető is lenne. Teljesség kedvéért összeállítottam a II. táblázatban ennek a correctiónak az értékét $\Delta\theta_2$-t, mind a 20 csillagra egy hónapos időközökben azon félévre, melyben az illető csillag éjjel delel. Ez a correctio is függ a földrajzi szélességtől, de abban az 5° szélességű övben, melyre a táblázatok vonatkoznak, állandónak vehető.

Ezek után a megfigyelés és számolás menete a következőkben foglalható össze. Mikor a megfigyelendő æquatori csillag közel ért a fonalháromszög síkjához, a fonalháromszöget ráállítjuk a sarkcsillagra s feljegyezzük az U_1 óraidőt. Azután észleljük az æquatori csillag átmenetét U_2 időpontban; az eltelt időköz $\vartheta = U_2 - U_1$. Az I. táblázatból kiveszszük a földrajzi szélességnek megfelelő θ átmeneti idő értékét s ehhez hozzáadjuk a $C\vartheta$, $n.\Delta\theta_1$ és $\Delta\theta_2$ javításokat (n jelenti az 1908.0 óta eltelt időt években), nyerjük az æquatori csillag átmenetének csillagidejét. Ezt átváltoztatjuk középidőre, a mi egyszerű táblázatokkal lehetséges, s az így nyert időadatot összehasonlítva az U_2 óraidővel, adódik az óra állása.

I. táblázat.

	φ	θ	C	$\Delta\theta_1$
1.		$0^h\ 40^m$	+	+
β Ceti	45°	15^s	1·61	3·31
	46	17	65	32
	47	19	70	33
	48	22	74	34
	49	24	79	35
	50°	26^s	1·84	3·36
2.		$2^h\ 1^m$	+	+
α Arietis	45°	33^s	0·71	3·76
	46	32	75	78
	47	30	80	80
	48	28	85	83
	49	26	90	86
	50°	25^s	0·95	3·88
3.		$2^h\ 55^m$	+	+
α Ceti	45°	45^s	1·07	4·00
	46	41	11	04
	47	37	15	08
	48	32	20	11
	49	28	24	15
	50°	24^s	1·29	4·19
4.		$4^h\ 27^m$	+	+
α Tauri	45°	73^s	0·61	4·33
	46	66	64	37
	47	58	67	42
	48	50	70	47
	49	42	74	52
	50°	33^s	0·77	4·57
5.		$5^h\ 4^m$	+	+
β Orionis	45°	97^s	0·80	4·38
	46	89	82	43
	47	80	85	48
	48	71	87	53
	49	62	90	58
	50°	52^s	0·93	4·63

	φ	θ	C	$\Delta\theta_1$
6.		$5^h\ 45^m$	+	+
α Orionis	45°	85^s	0·44	4·41
	46	76	45	46
	47	66	47	50
	48	56	49	55
	49	46	51	61
	50°	35^s	0·53	4·67
7.		$6^h\ 34^m$	+	+
α Canis majoris	45°	64^s	0·32	4·34
	46	54	33	39
	47	44	34	44
	48	33	35	49
	49	22	36	54
	50°	11^s	0·37	4·59
8.		$7^h\ 29^m$	—	+
α Canis minoris	45°	72^s	0·04	4·22
	46	62	04	27
	47	52	05	31
	48	41	05	36
	49	30	05	41
	50°	18^s	0·05	4·46
9.		$9^h\ 17^m$	—	+
α Hydræ	45°	79^s	0·69	3·90
	46	71	71	93
	47	62	74	96
	48	52	76	3·99
	49	42	78	4·02
	50°	32^s	0 80	4·06
10.		$9^h\ 59^m$	—	+
α Leonis	45°	98^s	0·61	3·69
	46	90	64	71
	47	82	67	73
	48	73	70	76
	49	64	73	78
	50°	56^s	0·76	3·81

	φ	θ	C	Δθ₁
11.		$11^h\ 7^m$	—	+
δ Leonis	45°	35^s	0·63	3·35
	46	30	67	36
	47	24	70	37
	48	18	74	38
	49	11	78	39
	50°	5^s	0·82	3·40
12.		$12^h\ 8^m$	—	+
γ Corvi	45°	64^s	1·54	2·98
	46	61	58	99
	47	58	63	98
	48	54	67	98
	49	50	72	97
	50°	47^s	1·77	2·97
13.		$13^h\ 20^m$	—	+
α Virginis	45°	12^s	1·00	2·60
	46	12	05	58
	47	12	09	56
	48	12	14	54
	49	11	19	53
	50°	11^s	1·24	2·51
14.		$14^h\ 12^m$	—	+
α Bootis	45°	4^s	1·66	2·27
	46	6	71	24
	47	8	75	21
	48	10	80	18
	49	12	85	15
	50°	14^s	1·90	2·12
15.		$15^h\ 14^m$	—	+
β Libræ	45°	31^s	1·29	2·07
	46	35	33	03
	47	40	37	2·00
	48	45	41	1·96
	49	50	46	92
	50°	55^s	1·50	1·88

	φ	θ	C	Δθ₁
16.		$16^h\ 36^m$	—	+
ζ Ophiuchi	45°	10^s	1·01	1·84
	46	18	04	80
	47	25	07	76
	48	33	10	71
	49	41	14	66
	50°	50^s	1·17	1·61
17.		$17^h\ 33^m$	—	+
α Ophiuchi	45°	53^s	0·47	1·75
	46	62	49	70
	47	71	51	65
	48	80	53	60
	49	90	56	55
	50°	100^s	0·58	1·49
18.		$19^h\ 50^m$	+	+
α Aquilae	45°	18^s	0·09	1·89
	46	28	09	84
	47	38	10	80
	48	49	10	76
	49	61	11	71
	50°	72^s	0·11	1·66
19.		$21^h\ 42^m$	+	+
ε Pegasi	45°	58^s	0·57	2·28
	46	67	59	25
	47	75	62	22
	48	84	64	19
	49	94	67	16
	50°	104^s	0·70	2·13
20.		$23^h\ 2^m$	+	+
α Pegasi	45°	16^s	0·74	2·73
	46	22	77	71
	47	28	81	69
	48	34	85	68
	49	41	89	67
	50°	48^s	0·93	2·65

II. táblázat. ($\Delta\theta_2$)

Hónap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Január	-1^s	$+0^s$	$+1^s$	$+2^s$	$+2^s$	$+2^s$	$+3^s$	$+3^s$	$+2^s$	$+2^s$	$+1^s$	$+1^s$	$+0^s$	$+0^s$						
Február			0	+1	1	1	2	2	3	2	2	2	2	1	$+0^s$	-1^s				
Márczius				—1	0	0	1	1	2	2	2	3	3	2	2	+1	$+0^s$			
Április								0	1	1	2	3	3	2	3	2	1	$+0^s$		
Május									0	0	1	2	2	2	3	3	2	1	$+0^s$	
Junius											0	0	1	1	2	3	2	2	1	$+0^s$
Julius	+1	0											0	0	1	2	2	2	2	1
Augusztus	2	1	0												0	1	1	2	2	2
Szeptember	3	2	2	+1	0	0	—1										0	1	2	2
Október	3	2	2	2	2	1	+1	0										0	1	2
November	2	2	3	2	3	2	2	1	0	0									0	1
Deczember	+1	+1	+2	+2	+3	+2	+3	+2	+1	+1	+0	+0								+0

AZ ELEKTRON-ELMÉLET EREDMÉNYEI ÉS PROBLÉMÁI.

(H. A. LORENTZ előadása.)

(Első közlemény.)

Egyesületük[1] műszaki bizottságának megtisztelő meghivása folytán ma az elektromosságról szóló tannak legújabb ágáról, az *elektron-elméletről* szóljak önökhöz. A tárgy oly nagy terjedelmű, hogy azon rövid idő alatt, melyben figyelmüket igénybe vehetem, annak kimerítő tárgyalására nem is gondolhatok. Ennélfogva engedjék meg, hogy róla csak általános átnézetet nyujtsak, s a tünemények sokaságából csupán néhányat érdemesitsek a behatóbb megbeszélésre.

Alig kell mondanom, hogy *elektron*-oknak oly rendkívül kicsinységű, elektromos töltésű részecskéket hivunk, melyekről föltételezzük, hogy minden szilárd, folyós és gáznemű testben mérhetetlen számban előfordulnak, s a melyek elhelyezkedése, mozgása és hatása alapján az ilyen testekben föllépő összes elektromagnetikus tüneményeket megmagyarázni törekszünk.

---

[1] Ezen előadást LORENTZ 1904 decz. 20-án tartotta a berlini elektrotechnikai egyesületben. Első izben 1905-ben, majd második kiadásban 1906-ban jelent meg Berlinben, Julius Springer kiadásában. A magyarra fordítás engedélyét mind a szerző, mind a kiadó a legkészségesebben megadták. Minden egyébre való tekinteteken kívül az előadást azért közöljük, mert szoros kapcsolatban áll korábbi, hasonló tárgyú közleményeinkkel, s azokkal egyetemben a fizikai kutatások mai állapotát van hivatva jellemezni. Ezen közleményeink: ZEEMAN előadása *Az atomoknál kisebb részecskékre vonatkozó kisérleti vizsgálatokról*, továbbá CURIEné műve *A radioaktiv anyagokra vonatkozó vizsgálatokról.* A jövőben talán módját ejthetjük annak, hogy az atomok desaggregatiójának elméletét is megismertessük, s ezzel ez irányú közleményeinket némileg betetőzzük.

Így például föltételezzük, hogy a megtöltött vezető felületén a pozitiv vagy negativ részecskéknek egy vékony rétege helyezkedik el. Ha a fémdróton keresztülhaladó árammal van dolgunk, akkor úgy vélekedünk, hogy a pozitiv részecskék az egyik, vagy hogy a negativ részecskék a másik irányban vándorolnak; talán úgy is, hogy mindkettő egyidejűleg megy végbe, s e szerint *kettős áram*ról beszélhetnénk.

Ez a mozgás, melyben az elektromos áram lényegét látjuk, törvényszerű és rendszeres. De mindazon helyeken, hol ellenállást kell leküzdenie, rendezetlen hőmozgássá alakul át. Ily módon válnak lámpáinkban a szénfonalak izzókká, s a bennük ide-oda rezgő elektronok fény- és hőkisugárzás forrásaivá lesznek.

Ha aztán a sugarak a légüres téren, tehát a szabad étheren hatolnak keresztül, akkor ideig-óráig megszabadultunk az elektronoktól; mert az étherben nincsenek jelen. De a sugár csakhamar valamely testre talál, melyben megtörik, melyet fölmelegít vagy a melyben valamely chemiai hatást kelt; akkor, úgy mondhatjuk, a sugarat ismét az elektronok fogják fel. Elektronok vannak a hasábok és lencsék üvegében, a fotografikus lemez fényérzékeny rétegében, s bár kevésbbé szabadok, mint a fémekben levők, de azért még sem teljesen mozdulhatatlanok. Csupán a fénysugárra várnak, hogy rezgésbe jöhessenek, s így a maguk részéről is befolyással lehessenek a fénysugár terjedésére.

Ezen itt csupán futólag megrajzolt képben sok vonás már igen régi keletű. Az elektromosság anyagi mivoltának eszméje, valamint az a nézet, hogy az áramot a mozgó elektromosság alkotja, az elektron-elméletnek és az elektromosságtan régibb formáinak közös vonásai; csupán az a különbség, hogy az elektron-elmélet ezen eszméket kicsiny, változatlan, egymástól különálló testecskék föltételezésével, tehát az elektromosság *atomisztikus szerkezeté*nek fölvételével szabatosabbakká teszi.

Hozzáteszem azt, hogy mi az elektromos áramot csak annyiban tekintjük az elektronok mozgásául, míg annak székhelyéül a ponderabilis anyag szolgál; a tiszta étherben föltételezett Maxwell-féle *eltolódási áramok*at egészen másnemüeknek tekintjük.

*

A mennyiben az elektron-elmélet minden a vezetékben föllépő áramot konvektiv áramként fog föl, rá nézve az a tény, hogy konvektiv áramoknak is van mágneses hatásuk, alapvető fontosságúnak tekintendő. Ha ki lehetne mutatni azt, hogy a töltéssel ellátott testnek ilyen hatása nincsen, akkor az elektron elméletet minden tétovázás nélkül el kellene ejteni. Innét ered az utóbbi években erre vonatkozólag végzett kisérleti kutatások nagy jelentősége. Önök bizonyára tudják, hogy Rowland volt az első, ki a mozgásban levő, töltéssel ellátott test mágneses hatását beigazolta. 1878-ban azt tapasztalta, hogy egy, a saját síkjában forgó, töltéssel ellátott korong e tekintetben a köralakú áramok egy rendszerével egyenértékű. Ezen a Helmholtz laboratoriumában végzett első kisérletekre néhány évvel később Hutchinsonnal közösen végzett újabb kisérletek következtek, melyeknél nemcsak a hatás fokozása sikerült, hanem az elektromosság elektromagnetikus és elektrosztatikus egységeinek arányát is számszerűleg megállapíthatták. Bár ily módon a Rowland-*effektus* teljesen bebizonyitottnak látszott, néhány évvel ezelőtt azt Crémien újólag kétségbevonta; mert sem Rowland kisérleti berendezésével, sem más módon nem sikerült tényleges eredményekre jutnia. Az ennek révén megindult vita azonban az elektron-elméletre nézve igen szerencsésen és általában örvendetes módon végződött. Miután Pender Baltimoreban a Rowland-féle kisérletet megismételte, a nélkül, hogy oly akadályokba ütközött volna, a melyekre Crémien talált, ez a két fizikus a vizsgálódást közösen folytatta, s így a kérdést annyira kiderítették, hogy most már a Rowlandtól levont következtetések minden kétségen felül állóknak tekinthetők. Más kisérletek, melyek közül csupán az Adamstól Cambridgeben (Mass.) Eichenwaldtól Moszkvában és Karpentól Párizsban végzetteket említem, ezt az eredményt beigazolták, s így azt állíthatjuk, hogy az elméletet erről az oldalról már veszedelem nem fenyegeti. Különben hozzátehetem azt, hogy ha Crémien korábbi eredményei bebizonyultak volna, akkor nem csak az elektron-elméletet, hanem az egész modern elektromossági elméletet is sok tekintetben módosítani kellett volna.

Már fentebb utaltam az elektron-elméletnek régebbi nézetekkel való hasonlatosságára. Különösen több vonásban egyezik a főleg W. Webertől hangoztatott és kétféle elektromos folyadék fölvételén alapuló elmélettel. Tényleg nincsen lényeges különbség abban, ha azt állítom, hogy a töltéssel ellátott test a pozitiv vagy negativ elektromos fiuidumok többletével, vagy ha azt állítom, hogy a test az elektronok egyik fajtájának többletével rendelkezik. Mostani nézeteink mégis és pedig két szempontból különböznek a korábbiaktól. Első sorban egész terjedelmükben elfogadjuk a Maxwell-féle elméletnek általános eszméit; másodsorban pedig az elektronok tulajdonságairól, viselkedésükről, töltésükről, tömegükről, méreteikről és sebességükről sokkal határozottabban nyilatkozhatunk, mint a hogyan korábban az elektromos fluidum részecskéiről nyilatkozni lehetett.

Engedjék meg, hogy legközelebb az első pontot világithassam meg kissé részletesebben.

*

A Maxwell-féle elmélet alapgondolataiban mindnyájan jártosak vagyunk; önök, uraim, azokat úgyszólván nap-nap után alkalmazzák. Jelenleg már sohasem gondolunk két elektromos test kölcsönös hatására, áramvezetők és mágnesek hatásaira, a nélkül, hogy az ezen testeket körülvevő elektromos- vagy mágneses-, vagy általában elektromágneses mezőt szemügyre ne vennők.

Ezen mezőben elképzeljük azt a két állapotot, melyeket az ú. n. *elektromos* és *mágneses erő* határoz meg, a melyeknek megadható energiamennyiség felel meg. Rendelkezésünkre állanak továbbá meglehetősen egyszerű egyenletek, melyek alapján a mezőt számításnak vethetjük alá; az egyik egyenlet összefüggést állapít meg az áram és a mágneses erő között, a másik megszabja azt az összefüggést, mely az elektromos erő és a mágneses indukczió közt fennáll. Szükségtelen, hogy ezeket az egyenleteket idézzem; csupán azt hozom emlékezetükbe, hogy az állapotok tovaterjedése általában oly sebességgel megy végbe, mely a fény terjedési sebességével ér föl.

Bár vannak staczionär állapotok, melyekben tovaterjedésről nem lehet szó, de a mint egy áramnak megváltoztatjuk erősségét, egy elektromos testet vagy egy mágnest mozgásba hozunk, elektromagnetikus hullámok keletkeznek, melyekben az energia kisugárzásának bizonyos fajtája megy végbe.

Az elektron-elmélet szerint a környező étherben minden elektron körül oly mező létezik, mely eleget tesz az általános MAXWELL-féle egyenleteknek;[1] minden olyan mező, melyet kisérleteink közben megfigyelünk, számtalan ilyen elemi mezőnek egymásra helyezkedéséből származik. A mi az egyes elektron mezejét illeti, úgy ez addig, míg az elektron nyugalomban van, tisztán elektrostatikus, de a mint az elektron mozgásnak indul, azonnal hozzájárulnak a mágneses erők is. Ha

---

[1] A MAXWELL-HERTZ-féle egyenletek az elektromosság és mágnesség közt fennálló kapcsolatosságnak legtökéletesebb kifejezői, s nemcsak a modern optika vizsgálatainál alapvető fontosságúak, hanem azzal, hogy az elektromos rezgésekre közvetlenül alkalmazhatók, egyúttal kiváló gyakorlati fontosságúak is.

Ezen egyenletek két csoportját különböztetjük meg. Az első csoport a mágneses erő időbeli változásait az elektromos erő térbeli változásaival köti össze, s ha H a mágneses, F az elektromos erőket, μ a mágneses permeabilitást, c pedig a fény terjedési sebességét jelentik, akkor a koordinátatengelyek szerint vett összetevőkre vonatkozólag

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = c \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \right)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = c \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = c \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right)$$

állanak.

Ez az egyenletrendszer az indukczió törvényeinek közvetlen folyománya.

a mozgás mindvégig állandó sebességgel s ugyanazon irányban folytatódik, akkor az állapot annyiban staczionär, a mennyiben az elektron egy változatlan mezőt hord magával. Minden más esetben, tehát a sebességnek minden változásánál, akár irány, akár nagyság szerint következik az be, sugárzással állunk szemben.

Ha tőlem az elektron-elmélet mathematikai kifejezését kivánnák, akkor ezen állításokat azokkal a képletekkel kellene igazolnom, melyek a mező meghatározására szolgálnak, s a melyeken minden további fejtegetéseink alapulnak. De azt hiszem, várakozásuknak inkább megfelelhetek, ha e helyett néhány szóval rámutatok azokra a föltevésekre, melyek a kérdéses formulák felállítására vezettek.

Az egyik föltevés az, hogy az éther nem csupán az elektronok közötti teret tölti ki egészen, hanem ezeket a részecskéket, melyeknek bizonyos kiterjedést tulajdonítunk, szintén átjárja; az elektron belsejében is van elektromagnetikus mező, melyet a külső mezővel egyidejűleg kell meghatároznunk.

Egy második föltevés, mely épen oly fontos mint az első, azt állitja, hogy az elektronok mozgásai közben maga az éther mozdulatlan. Ebben a közegben sokféle állapotváltozások me-

---

A második csoport viszont összefüggést állapít meg az elektromos erő időbeli változása és a mágneses erőnek térbeli változásai között és MAXWELL két föltevésén alapszik, melyek szerint először: *a tiszta éther dielektrikusan gerjeszthető*, másodszor: *a dielektromos polarizáczió változása egy galvan-áramlattal egyenértékű.*

Ha K-val az izolator dielektromos állandóját jelöljük, akkor az egyenletek második csoportja az elsőnek teljesen megfelelőleg:

$$K \cdot \frac{\partial F_x}{\partial t} = c\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)$$

$$K \cdot \frac{\partial F_y}{\partial t} = c\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$K \cdot \frac{\partial F_z}{\partial t} = c\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

Hogy ezen második csoport hypothetikus alapokon áll, annak oka abban rejlik, hogy a tisztán mágneses kölcsönhatások terén a Volta-indukcziónak nincsen analogonja.

hetnek végbe, melyeket elektromagnetikus hatásaik folytán veszünk észre; de a közegnek a folyadékok módjára való áramlását kizártnak tartjuk.

A mozdulatlan éther ezen föltevése FRESNELtől származik, s czélja egyelőre az volt, hogy a mozgó testekben mutatkozó bizonyos optikai tünemények magyarázatát tegye lehetségessé. Jelenleg a föltevés érdekében elektromagnetikus megfigyelésekre is hivatkozhatunk. Ugyanis ha nem csupán egy elektromos töltésű lemezt, mint ROWLAND kisérleteinél, hanem egy egész lemezes sűrítőt indítunk forgásnak, mi mellett a forgástengelyt a lemezekre merőlegesen állónak veszszük, akkor, mint azt először RÖNTGEN észlelte, a dielektrikumból is indul ki mágneses hatás. EICHENWALD kisérleteiből kitünt, hogy egy készüléknél ponderabilis dielektrikum esetében ez a hatás nem ér föl teljesen a dielektromos eltolódással. Sőt inkább föl kell tételeznünk, hogy a dielektromos eltolódás (MAXWELL szerint «dielectric displacement») két részből álló, melyek egyike az anyaghoz tapad, másikának székhelye azonban az étherben van. Csupán az első rész, a mennyiben azt a mozgó anyag magával viszi, hozhat létre mágneses mezőt.

1. Jegyzet. Hogy az éthert a mozgatott ponderabilis anyag nem ragadja magával, azt oly kisérletek bizonyítják, melyeknél a mágneses mezőben valamely dielektrikum hozatott mozgásba. Ez esetben az eltolódó testben az erővonalok átmetszése közben, elektromos erő fog indukáltatni, mely az erővonalakra s a mozgás irányára is merőleges, s a melyet alkalmas kisérleti berendezésekkel megfigyelhetővé tehetünk. Ha már most az éther mozdulatlan marad, akkor a hatásnak arányosnak kell lennie $(\varepsilon-1)$-gyel, hol ε a kérdéses testnek dielektromos állandója, s az étherre vonatkozólag $\varepsilon=1$.

H. A. WILSON egy kívül-belül fémmel födött üres ebonithengert geometriai tengelye körül forgatván, az ezen tengelylyel párhuzamos mágneses mezőben oly eredményekre jutott, melyek az elmélet követelményeinek megfelelők.

BLONDLOT már korábban azt találta, hogy levegőnek egy mágneses mezőben való mozgása közben indukcziós hatás nem figyelhető meg. Ennek az a magyarázata, hogy ebben az esetben az ε állandó csak kevéssé különbözik az egységtől.

Ford. *Bozóky Endre.*

AZ EINTHOVEN-FÉLE HÚROS GALVANOMÉTER ÉS ALKALMAZÁSA VÁLTAKOZÓ ÁRAMOK MÉRÉSÉRE.

W. Einthoven az Annalen der Physik 12. kötetében (1903) az 1059—1071. lapokon érdekes új galvanométert ír le, mely sok esetben előnyösen használható igen gyenge áramok mérésére. Az eszköz lényegben erős patkó-mágnes sarkai között, az erővonalakra merőlegesen kifeszített vékony vezető fonálból — a *húrból* — áll. A húron vezetjük keresztül a mérendő áramot. A mágnes a húrra Biot-Savart törvénye szerint oly erőt gyakorol, mely a mágneses erővonalakra és az áram irányára merőleges.

Egyenáram esetén ez az erő időben állandó s ennek hatása alatt a húr kihajlik. A mágnes végei át vannak fúrva, az egyik furatba az erővonalakkal párhuzamos tengelyű mikroszkóp van beillesztve, a húr kihajlása tehát a mikroszkópban követhető s az okulár-mikrométeren leolvasható. A mikroszkópban látható kép eltolódása, mely bizonyos közben arányos a húron áthaladó áram erősségével, ilyenformán mértéke a húron átfolyó áram erősségének.

Einthoven eszközén a húr mintegy 0·0024 mm vastagságú ezüstözött kvarczfonál, melynek feszültsége alkalmas állító csavarokkal szabályozható. A feszültség növelésével természetesen az eszköz érzékenysége csökken s így a feszültség változtatásával az eszköz «shunt»-ök alkalmazása nélkül gyengébb és erősebb áramok mérésére is használható.

Az ezüstözött kvarczfonál ellenállása persze igen nagy: az első eszközön, melyet Einthoven leír 12·5 cm hosszú húr került alkalmazásra, melynek ellenállása mintegy 10,000 ohm.

E nagy ellenállása miatt csak bizonyos czélokra alkalmazható előnyösen, különösen szigetelések mérésére, vagy pedig mint voltmérő kerülhet alkalmazásba.

20,000 Gauss erősségű mágneses tér esetén az eszköz érzékenysége rendkívül nagy. EINTHOVEN meglehetős körülményes berendezéssel lefényképezte a húrnak 660-szorosan nagyított képét; ezen fényképen 1 mm-nyi eltolódás a húr legérzékenyebb kifeszítése mellett 10^{-11} Ampère áramnak felel meg, minthogy pedig egy tizedmilliméter még megbecsülhető, ezen eszközzel 10^{-12} *A*. erősségű áramokat még észre lehet venni. Ha az eszközt mint voltmérőt használjuk, ezen érzékenység 10^{-8} Voltnak felel meg. Ezt az érzékenységet eddig még a legérzékenyebb más rendszerű (forgó tekercsű) galvanométerekkel is alig lehetett megközelíteni.

Közelfekvő gondolat, hogy az EINTHOVEN-féle eszközt *váltakozó* áramok mérésére is felhasználjuk; ha ugyanis a húron váltakozó áramot bocsátunk keresztül, a reá ható elektromágneses erő az áram irányával együtt változtatja irányát s így a húr gyors rezgésbe jön, mely rezgésnek amplitudója a váltakozó áram erősségének mérésére szolgálhat.

EINTHOVEN második közleményében (Ann. d. Phys. *14*, 190. l.) leírja, hogy tényleg fel is használja galvanométerét kicsiny váltakozó áramok mérésére. Váltakozó áramok hatása alatt — mondja EINTHOVEN — «a *világos* látótérben a vékony fekete húrkép kiszélesedik néhány czentiméter széles sávvá, mely fehéresszürke színü és annál gyöngébben válik ki a látótérben, minél szélesebb. A szürke sáv közepe mindig összeesik a nyugvó húr képével, míg a sáv széleiről megjegyzendő, hogy valamivel sötétebbnek rajzolódnak, mint a sáv többi részei».

EINTHOVEN így egy SIEMENS-féle telefon áramát meg tudta figyelni eszközében.

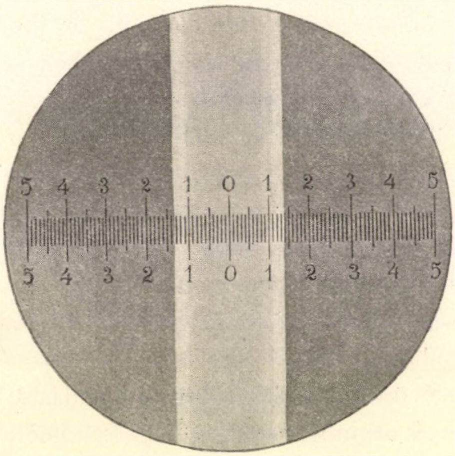
Negyedik közleményében (Ann. d. Phys. *21*, 687. l.) EINTHOVEN visszatér a váltakozó áramok mérésére és megjegyzi, hogy jó eredményeket ért el eszközével a WHEATSTONE-féle hídban, ha a kvarczfonalat vékony fémfonállal helyettesíti. E helyettesítés okát és a tényleg elért érzékenységet azonban nem említi.

Minthogy gyönge váltakozó áramok egyszerű és pontos lemérésére régi problémája a fizikusoknak, magam is meg akartam győződni arról, mily eredmények érhetők el az EINTHOVEN-féle galvanométerrel.

GÁTI BÉLA mérnök úr volt szives egy ily húros galvanométert rendelkezésemre bocsátani, ezzel végeztem ama kisérleteket, melyekről itt beszámolok. Az eszköz az EDELMANN-féle ú. n. kis húros galvanométer, mely kisebb érzékenységű ugyan, mint az, a melyről EINTHOVEN értekezéseiben szól, de sokkal egyszerűbb és könnyen kezelhető.

Ellenállása 3800 ohm és egyenáram esetén a legkedvezőbb feszültség mellett 10^{-6} A 1 osztályrésznyi eltolódást okozott. Egyenáramra nem nagy az érzékenység, de ha ugyanily érzékeny váltakozó áramra is, akkor ez már mindenesetre igen figyelemreméltó eredmény, mert 10^{-6} A-nyi váltakozó áramot lemérni már csak körülményesebb kisérleti berendezéssel lehet. A mint azonban a városi 100 voltos váltakozó áramú vezetékből megfelelő önindukcziómentes ellenállások közbekapcsolása által 10^{-5} A áramot vezettem a galvanométeren keresztül, azt tapasztaltam, hogy a világos látótérből a húr egyszerre eltünt, akárcsak elszakadt volna. Igen figyelmes vizsgálat mellett a 0 helyzettől jobbra és balra észre lehetett venni egy-egy igen halvány vonalat, melyek a rezgő húr fordulóhelyzeteinek feleltek meg, a jelenség azonban oly gyenge, hogy ily alakban teljesen alkalmatlan a gyakorlati alkalmazásra. A vékony gyorsan rezgő húr tehát nem jól látható világos látótérben. Érthető tehát az is, hogy miért helyettesíti EINTHOVEN a kvarczfonalat fémfonállal, ha váltakozó áramot akar mérni. A fémfonál ugyanis sokkal vastagabb s így a látótérben jobban látszik; persze a fémfonál esetén az eszköz érzékenysége kisebb.

Egyszerű fogással azonban a vékony kvarczfonál gyors mozgását is igen jól láthatóvá tehetjük, ha ugyanis *sötét látótérben a fonalat világítjuk meg.* Nem is kell ehhez semmiféle különös berendezés, elég a világító fényforrást nem a mikroszkóp tengelyébe, hanem attól kissé oldalt elhelyezni. Némi próbálgatás által könnyen elérjük, hogy az ilyen módon oldalt megvilágított fonalat a sötét alapon világosnak látjuk. Elérhetjük azt is, hogy az alap azért még nem egészen sötét, úgy, hogy az okulár osztályzatai egészen jól láthatók. Ha így bocsátunk váltakozó áramot az eszközbe, a húr szép fehér sávvá szélesedik ki, melynek szélei igen élesek és pontosan leolvas-



hatók. A mellékelt rajz mutatja a jelenséget, mely a látótérben megjelenik.

Az eszköz érzékenységét ilyen úton körülbelül ugyanakkorának találtam, mint egyenáram esetén, ugyanis 10^{-6} A adott egy osztályrésznyi kitérést az egyensúlyi helyzetből, tehát két osztályrész szélességű sávot. A sáv szélességét az áram erősségével arányosnak találtam.

Összehasonlítottam azután az eszköz érzékenységét egy közönséges telefonéval, a Wheatstone-féle hidkombináczióban. A Kohlrausch-féle hengeres rheostatot úgy a telefon, mint a húros galvanométer alkalmazása mellett körülbelül egy osztályrészig (az egész rheostat hosszának egy ezredrészéig) lehetett beállítani s a mikor a galvanométer húrja mozdulatlan maradt, a telefon is elhallgatott. Igen szépen lehetett kisérni a telefonhang erősbödésével párhuzamosan a galvanométer sávjának kiszélesedését.

Az Einthoven-féle galvanométer tehát valóban egyszerű, könnyen kezelhető készülék, melylyel igen kicsiny váltakozó áramok mérhetők és a melynek az elektrodinamométerek felett az a nagy előnye, hogy úgyszólván teljesen önindukcziómentes. A nagyobbik Edelmann-féle modellel ugyanily eljárás mellett könnyen megfigyelhetők volnának 10^{-12} A erősségű váltakozó áramok; ily rendű áramok eddig még egyáltalában nem voltak megfigyelhetők.

Zemplén Győző.

Kimutatás

az 1907. év jan. hó 1-től máj. hó 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1904. évre: Aczél Géza 6 kor., Winkler Lajos dr. 10 kor. Összesen ... 16 kor

1905. évre: Fertig Vilmos 10 kor., Layer Antal dr. 6 kor., Szerényi Géza 10 kor. Összesen ... 26 kor.

1906. évre: Balla József 6 kor., Bein Károly 10 kor., Bodola László 6 kor., Borossay Dávid 6 kor., Bozmánszky Gyárfás 6 kor., Egly Sándor 6 kor., Faragó Andor 6 kor., Fodor László dr. 6 kor., Hassak Vidor 6 kor., Jakucs István 6 kor., Képessy Imre 10 kor., Layer Antal dr. 6 kor., Obláth Richárd 6 kor., Renner János 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Winter József 10 kor. Összesen ... 108 kor.

1907. évre: Angehern Tivadar 10 kor., Arató Frigyes 6 kor., Balla József 6 kor., Baló Gyula 6 kor., Bánki Donát 10 kor., Barabás Jenő 6 kor., Barányi Balázs 6 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Berkes Imre 10 kor., Bielek Miksa 10 kor., Bóbita Endre 6 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bozmánszky Gyárfás 6 kor., Bretz Berta 6 kor., Bricht Lipót 10 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Bukovszky János 6 kor., Czakó Adolf 10 kor., Czekeliusz Aurél 10 kor., Czuczy Emil 6 kor., Demeter István 6 kor., Dózsa János 6 kor., Eber József 10 kor., Eltscher Simon 6 kor., Eötvös Loránt b. 10 kor., Farbaky István dr. 6 kor., Feichtinger Győző 10 kor., Fekete Jenő 10 kor., Félegyházy Antal 6 kor., Ferenczy Istvén 6 kor., Frank István 6 kor., Ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 kor., Glücklich Vilma 10 kor., Goldziher Károly dr. 10 kor., herényi Gotthard Jenő 6 kor., Hahóthy Sándor 10 kor., Halász Ernő 10 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Heuer Ede 10 kor., Hill József 6 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Ilosvay Lajos dr. 10 kor., Jánosi Imre 10 kor., Jakucs István 6 kor., Javorik János 6 kor., Jónás Ödön 10 kor., Jordán Károly dr. 10 kor., Kados Aladár 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Képessy Imre 10 kor., Ketterer Károly 6 kor., Kherndl Antal 10 kor., Király László 6 kor., Kirchknopf András 6 kor., K. Kiss József 6 kor., Klatt Román

6 kor., Klein Pál 6 kor., Kleiszner Rezső 10 kor., Klimkó Mihály 6 kor., Klúg Nándor dr. 10 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., Kopp Lajos dr. 10 kor., Korda Dezső 6 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Adolf 6 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Kövesi Ferencz dr. 6 kor., Kövesligethy Radó dr. 10 kor., Laczó Endre 6 kor., Lendvay Hugó 6 kor., Lengyel Béla dr. 10 kor., bozóki Lengyel Sándor 10 kor., Lóky Béla dr. 6 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Marczell György 10 kor., Markoss Imre 6 kor., Mattyasovszky Kássián 6 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Miller Gyula 6 kor., Módly Krizsó 6 kor., Morotz Kálmán 10 kor., Muraközy Károly 10 kor., Müller József 10 kor., Nagy Dezső 10 kor., Nemes Endre 10 kor., Neumann Jenő 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Novobatzky Károly 6 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pekár Dezső dr. 10 kor., Radó Simon 6 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Ráth Arnold Lajos 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Schenek István dr. 10 kor., Schimanek Emil 10 kor., Schuller Alajos 10 kor. Schwartz Ottó dr. 6 kor., Simon Tádé 6 kor., Stauber József 6 kor., Straub L. Gyula 10 kor., Straub Sándor 10 kor., Strausz Ármin 10 kor., Szabó János 6 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szakmáry József 6 kor., Székely Károly 6 kor., Széky István 6 kor., Széll Kálmán 6 kor., Szijártó Miklós 10 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Szőke Béla 10 kor., Tangl Károly 6 kor., Terlanday Emil 10 kor., Thán Károly dr. 10 kor., Thanhoffer Lajos 10 kor., Tresztyánszky Sándor 6 kor., Ulreich Ede 6 kor., Vajnóczky István 10 kor., Vámos Dezső 10 kor., Vidovich Béla 6 kor., Vörös Cyrill 10 kor., Waldapfel János dr. 10 kor., Wittmann Ferencz 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zilahy László 6 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen ... ... 1058 kor

1908. évre: Arató Frigyes 4 kor., Bozmánszky Gyárfás 6 kor., Osztrovszky Sándor 7 kor. Összesen ... ... 17 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1907. évre: Aradi kir. főgymn. 10 kor., Bártfai áll. főgymn. 10 kor., Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymn. 10 kor., Beregszászi áll. főgymn. 10 kor., Brassói áll. főreálisk. 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főreálisk. 10 kor., Budapesti VI. k. áll. fels. leányisk. 10 kor., Budapesti VIII. k. áll. főgymn. 10 kor., Budapesti ciszt. r. tanárképző 10 kor., Budapesti m. k. tud. egyetem könyvtára 10 kor., Budapesti orsz. meteorologiai int. 10 kor., Csiksomlyói r. kath. főgymn. 10 kor., Debreczeni áll. főreálisk. 10 kor., Deési áll. főgymn. 10 kor., Egri áll. főreálisk. 6 kor., Eötvös Kollegium 10 kor., Fogarasi áll. főgymn. 10 kor., Győri áll. főreálisk. 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgymn. 10 kor., Hajdúnánási ev. ref. főgymn. 10 kor., Jászberényi kir. kath. főgymn. 10 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Kaposvári áll. főgymn. 10 kor., Karczagi ev. ref. főgymn. 10 kor., Kecskeméti áll. főreálisk. Késmárki ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Kisujszállási ev. ref. főgymn. 10 kor., Klein Adolf 10 kor., Körmöczbányai áll. főreálisk. 10 kor., Lőcsei áll. főreálisk. 10 kor., Lugosi főgymn. 10 kor., Makói áll. főgymn. 10 kor., Malaczkai zárdafőnökség 10 kor., Mármarosszigeti ev. ref. főgymn. 6 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgymn. 10 kor., Mérnök-épitész-egylet 10 kor., Nagyenyedi Bethlen főisk. 10 kor., Nagyváradi áll. főreálisk. 10 kor., Nyitrai felsőbb leányisk. 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 6 kor., Privigyei kegy. rendi gymn. 10 kor., Pozsonyi áll. főreálisk. 10 kor., Pozsonyi kir. kath. főgymn. 10 kor., Sepsi-szt-györgyi ev. ref. főgymn. 10 kor., Soproni ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreálisk. 6 kor., Szakolczai főgymn. 10 kor., Szamosujvári áll. főgymn. 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgymn. 10 kor., Szászvárosi ev. ref. Kunkollegium 6 kor., Szegzárdi áll. főgymn. 10 kor., Székesfehérvári áll. főreálisk. 10 kor., Székesfehérvári fels. leányisk. 10 kor., Szepesiglói áll. tanitóképző 10 kor., Temesvári áll. főgymn. 10 kor., Temesvári áll. főreálisk. 10 kor., Temesvári felső leányisk. 10 kor., Ungvári áll. főreálisk. 10 kor., Ungvári kir. kath. főgymn. 10 kor., Zilahi ev. ref. főgymn. 6 kor. Összesen ... 576 kor.

1908. évre: Debreczeni főreálisk. 10 kor., Kecskeméti főreálisk. 5 kor. Összesen ... 15 kor.

Összesen befolyt:

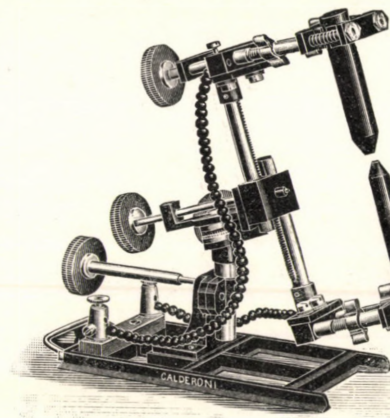
Hátralékokból ... 150 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból ... 1075 «
Előfizetési dijakból ... 591 «

Kelt Budapesten, 1907 junius 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—
A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **23.**—
Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

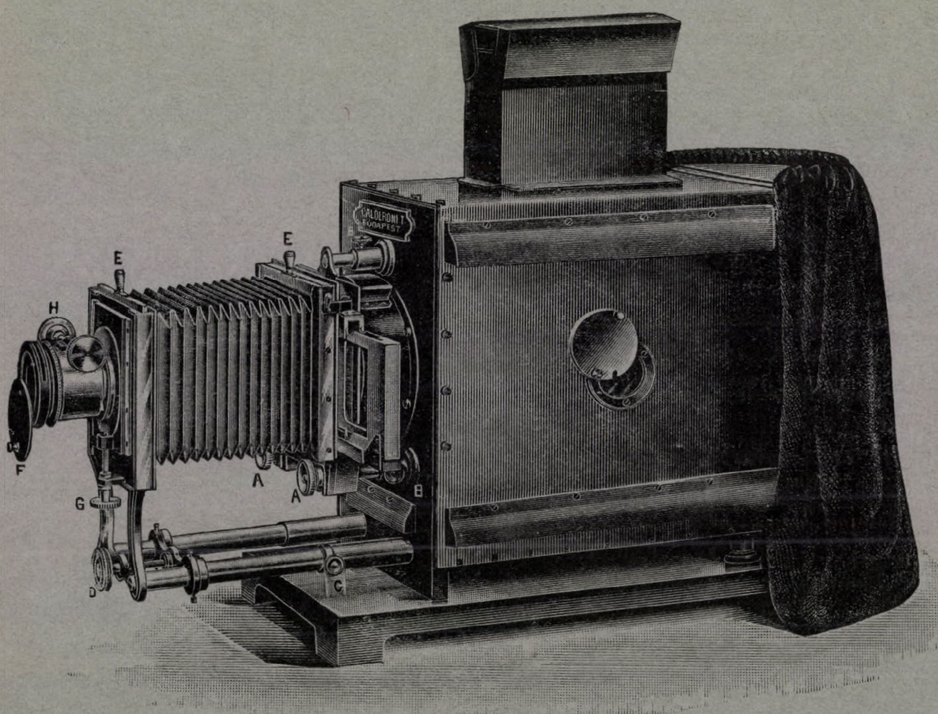
	200	240	280	300	320	360	400	480cm.négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**—	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kis hid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.**—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHATODIK ÉVFOLYAM

VI. FÜZET 1907 OKTÓBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1907.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhatodik társulati év 1907 január 1-jén kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☛ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

ANYAGI PONT STABILITÁSÁRÓL ÉS LABILITÁSÁRÓL ELLENÁLLÓ KÖZEGBEN.[1]

1. Fejér Lipót tagtárs úr az Akadémiai Értesítőben 1906-ban e tárgyról közzétett dolgozatában két tételt állított fel és bizonyított be. Az első tétel ellenálló közegben szabadon mozgó anyagi pont stabilitására vonatkozván következőleg szól: Ha az $U(x, y, z)$ potentiálnak a G egyensúlyi helyzetben izolált maximuma van, akkor a jövőre nézve stabilitás áll fenn, míg a multra nézve a labilitás eshetősége nincs kizárva. A második tétel ellenálló közegben mozgó anyagi pont labilitására vonatkozik és a v sebességgel mozgó anyagi pont ellenében gyakorolt közegellenállást $f(v)$-vel jelölvén, így hangzik: Ha az $U(x, y, z)$ potentiálnak a G egyensúlyi helyzetben a Taylori sorának legalsóbbrendű tagjaiból felismerhető izolált minimuma van és ha $\frac{f(v)}{v}$ kicsiny v értékek mellett egy véges határ alatt marad, akkor az egyensúlyi helyzet labilis.

Kivánatosnak vélem Fejér úr e vizsgálatainak két irányban való folytatását. Először is nála nyitva maradt az utóbbi tételben az a kérdés, vajjon akkor, a midőn az $\frac{f(v)}{v}$ kicsiny v értékek mellett végtelen nagy határhoz közeledik, noha az $f(v)$ maga végtelen kicsinynyé lesz, milyen az egyensúly? stabilis-e vagy labilis? Másodszor Fejér úr, miként szokás, abból a feltevésből indul ki, hogy a közeg ellenállása az anyagi pont sebességével π szöget zár be. Kérdés, mi lesz a következmény, ha ezt a megszorító feltevést elejtve csak azt köve-

[1] Előadatott a math. és phys. társulat 1907 április 20-iki közgyűlésén.

teljük meg, hogy a szög $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb és legfeljebb $=\pi$ legyen?

Nyilvánvaló, hogy a stabilitási tétel így is érvényes marad. Mert hiszen a közeg ellenállása két komponensre bontva a pálya érintője és első normálisa irányában, az utóbbi komponens munkája $=0$, míg az előbbié mindenkor negativ. Ámde a szóban levő stabilitási tétel az eleven erő egyenletéből tisztán annak a ténynek a felhasználásával foly, hogy a közeg ellenállásának a munkája negativ. Áll tehát a tétel a mondott általánositás mellett is. Így hát csak a labilitási tétel lesz megvizsgálandó. Arra a kérdésre, hogy miként áll a dolog, ha az anyagi pont nem mozog szabadon, hanem adott felületen vagy vonalon kénytelen maradni, más alkalommal szándékozom rátérni.

II. Az ellenállás iránya legyen legelsőbben a pont sebességével ellenkező irányú. Jelöltessenek az $m=1$ tömegű anyagi pont polárkoordinátái r, ϑ, ω-val, a szabad erő U potentiáljának legyen a G kezdőpontban (hol $r=0$) izolált minimuma és az U sorkifejtése Taylor szerint legyen

$$U=U_{2n}+U_{2n+1}+\cdots, \tag{1}$$

hol a jobb oldali tagok az anyagi pont x, y, z kartéziusi koordinátáiban $2n$, $2n+1, \ldots$ rendűek lévén az U_{2n} a mellett definit positiv.

Az $r''=\frac{d^2r}{dt^2}$ meghatározására ez egyenlet szolgál:

$$r''=\left(\frac{\partial U}{\partial r}+r\vartheta'^2+r\sin^2\vartheta\omega'^2\right)-f(v)\frac{r'}{v}\cdot \tag{2}$$

Miután

$$r\frac{\partial U}{\partial r}=x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}+z\frac{\partial U}{\partial z}=2nU_{2n}+(2n+1)\,U_{2n+1}+\cdots,$$

tehát $r=0$ középpont körül, hol U minimum, R sugárral egy gömböt lehet határolni, úgy hogy a $\frac{\partial U}{\partial r}$ a középponton kívül e gömbben sehol másutt el nem enyészik, tehát mindenütt másutt >0 és véges.

Az anyagi pont kezdőhelyzetéből P_0-ból (a gömb belsejében) akkora v_0 kezdősebesség és r'_0 radiális sebességkomponenssel induljon meg, hogy

$$0 < f(v_0)\frac{r'_0}{v_0} < \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 \tag{4}$$

egyenlőtlenség teljesüljön. Akkor a (2)-ből folyólag az r'' kezdetben és egy bizonyos ideig bizonyosan positiv lévén, az r' ez időben nő. Megeshetik, hogy (a gömb belsejében) az r'' későbben negativvé, majd megint positivvá lesz és így tovább. Akkor az r' minimális értékei a növekedő

$$t_1, t_2, \ldots, t_\nu$$

időtartamok végpontjaiban legyenek sorban

$$r'_1, r'_2, \ldots, r'_\nu.$$

Így hát ez időpontokban $\frac{dr'}{dt} = 0$, azaz

$$r''_i = 0. \quad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

A (2) egyenletből az következik tehát, hogy

$$\frac{f(v_i)}{v_i} r'_i \geqq \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i, \quad (i=1,2,\ldots,\nu) \tag{5}$$

mely egyenlőtlenség így is írható

$$\frac{r'_i : f(r'_i)}{v_i : f(v_i)} f(r'_i) \geqq \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i. \tag{5'}$$

Két eset lehetséges: Az $\frac{f(v_i)}{v_i}$ értéknek elegendő kicsiny R gömbön belől vagy van felső határa, vagy nincs felső határa. Az első esetben jelöltessék a felső határ M-mel; így az (5) írható:

$$r'_i \geqq \frac{1}{M}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i. \quad (i=1,2,\ldots,\nu) \tag{6}$$

A második esetben az $\frac{f(v)}{v}$ értéke $v=0$ helyen végtelen nagy, tehát a $\frac{v}{f(v)}$ értéke $v=0$ helyen maga is $=0$. Az $f(v)$ máskülönben (t. i. nem elenyésző sebesség esetén) positiv; tegyük föl, hogy 0-tól eléggé kicsiny v értékig monoton változik. Akkor a $\frac{v}{f(v)}$ addig, a míg a v elegendő kicsiny, növekedő v-vel maga is monoton nő: legyen v_m ama legnagyobb v érték, a melynél a nevezett viszony még mindig nem fogy. Már most határoljunk el a G pont körül egy

$$U = U_m = \text{const.}$$

niveaufelülettel egy tartományt, a melyben egy elegendő kicsiny sebességgel kiinduló anyagi pont ellenállás nélküli közegben sem érhetné el sehol se a v_m sebességet és ha az R gömb nem feküdnék egészen e tartományon belül, akkor a G pont körül egy kisebb R_1 sugárral leirt gömböt választok az R gömb helyébe, úgy hogy az R_1 gömb egészen e tartományon belül feküdjék; vizsgálódásunkat pedig erre az R_1 tartományra korlátozván, a P_0 kezdőhelyzetet ez R_1 tartományon belül választom.

Miután az r' a v sebességnek derékszögű projekcziója a radiális irányra, tehát $r' \leqq v$. Abból tehát, hogy $v : f(v)$ az R_1 tartományban növekedő v-vel maga is nő, az (5') egyenlőtlenség bal oldalán levő törtre nézve az következik, hogy értéke $\leqq 1$, minélfogva az egyenlőtlenség azt mondja, hogy

$$f(r'_i) \geqq \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i. \qquad (6')$$

$$(i=1, 2, \ldots, \nu)$$

Ezentúl felteszem, hogy

$$\lim_{v=0} f(v) = 0. \qquad (6'')$$

Akkor a (6) és a (6') alapján kimondhatom, hogy az r'_i bizonyosan nagyobb mint 0 és határértéke se 0.

Ugyanis az $r'_0 > 0$ és $r''_0 > 0$ lévén, az r' mindaddig nő, a míg r'' nem válik zérussá. Eddig tehát bizonyára az r is nő, minélfogva $\frac{\partial U}{\partial r}$ mindig >0. Ha már mostan az r''-nek értéke legelőször zérussá válván, azután negativvé lesz, akkor az r' bizonyára folytonosan positiv marad; mert hiszen a (2)-ből folyólag másképen az r'' nem is lehetne negativvé. Az r tehát folytonosan nővén, az r' első minimumának a helyén $r_1>r_0$, minélfogva

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_1 > 0,$$

és így akár a (6), akár a (6'), (6'') egyenlőtlenségekből folyólag

$$r'_1 > 0.$$

Miután pedig az r'' azután megint >0 stb., tehát a következtetéseket folytathatom és arra az eredményre jövök, hogy

$$r_\nu > r_{\nu-1} > \cdots > r_1 > r_0,$$

és hogy az r' sebességkomponensnek alsó határa is positiv érték. Sőt tovább mehetek a $t=t_\nu$ időn túl is és mondhatom, hogy r' végesvégig positiv maradván, az R_1 gömbfelületet minden esetben véges sebességgel, tehát véges időn belől érem el.

A G helyzet ennélfogva labilis egyensúlyi helyzet.

Áll tehát FEJÉR tétele mellett e következő bővítése:

Ha az U szabad erőpotentiálnak a G helyen olyan izolált minimuma van, a mely az U Taylori sorának legalsóbbrendű tagjaiból ismerhető fel és ha a közeg ellenállásának iránya a v sebességével ellenkező lévén, az értéke $v=0$ esetén $=0$ különben pedig positiv és eléggé kicsiny v értékig monoton növekedő, akkor a szabadon mozgó anyagi pont a G helyen labilis egyensúlyi helyzetben van.

A bizonyitás menetéből könnyű belátni, hogy a labilis egyensúlyhoz nemcsak *elegendő* feltétel az U potencziálnak ilynemű minimum volta és az $f(v)$ ellenálló erőnek itt jellemzett függvényi tulajdonsága, hanem szabad pont esetén, melyre a potencziálos erőn kívül csakis a sebességgel ellentétes és vele legalább egy darabig monoton módon változó erő hat, e feltételek teljesülése a labilis egyensúlyhoz *szükséges* is.

III. Már most a következő kérdést intézem: A szabadon mozgó pontra hasson az U potencziálos erőn kívül még olyan erő is, melynek iránya mindenkor a pálya első görbületi sugarának vonalába esik; de a sebességgel ellentétes erő ne hasson rá. Ha G helyen az U-nak olyan izolált minimuma van, mint elébb, kérdezem, milyen az egyensúly G helyen?

A pont mozgásegyenletei

$$\begin{aligned} x''+\lambda v\frac{d}{dt}\frac{x'}{v}&=\frac{\partial U}{\partial x},\\ y''+\lambda v\frac{d}{dt}\frac{y'}{v}&=\frac{\partial U}{\partial y},\\ z''+\lambda v\frac{d}{pt}\frac{z'}{v}&=\frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned} \tag{7}$$

hol λ egyelőre akármilyen törvény szerint változó mennyiség lehet.[1] A (7) egyenletrendszerből következik, hogy a potencziálos erőt Q-val jelölvén

$$\frac{d^2U}{dt^2}=Q^2\cos^2(Q,v)+\frac{1}{1+\lambda}Q^2\sin^2(Q,v)+V, \tag{8}$$

hol

$$\begin{aligned} V=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}x'^2+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}z'^2+2\frac{\partial^2U}{\partial y\partial z}y'z'+\\ +2\frac{\partial^2U}{\partial z\partial x}z'x'+2\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}x'y'. \end{aligned} \tag{8'}$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2}&\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial x}x'+\frac{\partial U}{\partial y}y'+\frac{\partial U}{\partial z}z'\right)\equiv\\ &\equiv\frac{\partial U}{\partial x}x''+\frac{\partial U}{\partial y}y''+\frac{\partial U}{\partial z}z''+V, \end{aligned} \tag{9}$$

---

[1] Megjegyzem, hogy az erő, melynek komponensei

$$-\lambda v\frac{d}{dt}\frac{x'}{v},\quad -\lambda v\frac{d}{dt}\frac{y'}{v},\quad -\lambda v\frac{d}{dt}\frac{z'}{v},$$

a pálya első görbületi sugarába esvén, értelmére nézve positiv λ esetén a görbületi középpontból a pálya felé irányuló.

és

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\frac{dU}{dt}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{x'}{v} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{y'}{v} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{z'}{v}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial U}{\partial x}\frac{d}{dt}\frac{x'}{v} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{d}{dt}\frac{y'}{v} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{d}{dt}\frac{z'}{v} + \frac{V}{v}. \qquad (9')$$

Ez egyenletekből a (7) mozgásegyenletek felhasználásával következik, hogy

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \lambda v \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\frac{dU}{dt}\right) = Q^2 + (1+\lambda)\, V, \qquad (10)$$

hol

$$Q^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2.$$

Továbbá

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\frac{dU}{dt}\right) \equiv \frac{1}{v}\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{1}{v^2}\frac{dU}{dt}\frac{dv}{dt}$$

identitás révén a (10) így írható

$$(1+\lambda)\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{\lambda}{v}\frac{dU}{dt}\frac{dv}{dt} + Q^2 + (1+\lambda)\, V.$$

Ámde a nem potencziálos erőnk merőleges az anyagi pont mindenkori sebességére; ennélfogva az elevenerő-egyenlet fennállván

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dt};$$

így tehát

$$(1+\lambda)\frac{d^2U}{dt^2} = \lambda\left(\frac{1}{v}\frac{dU}{dt}\right)^2 + Q^2 + (1+\lambda)\, V. \qquad (10')$$

Végül tekintetbe veendő, hogy

$$\frac{1}{v}\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{x'}{v} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{y'}{v} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{z'}{v} = Q\cos(Q, v),$$

és így

$$\lambda\left(\frac{1}{v}\frac{dU}{dt}\right)^2 + Q^2 = (1+\lambda)\, Q^2\cos^2(Q, v) + Q^2\sin^2(Q, v),$$

a mivel a (8) egyenlet igazolva van.

E (8) egyenlet alapján pedig már *kimondható, hogy abban az esetben, a midőn az U-nak minimumvolta Taylori sorának másodfokú tagjából felismerhető, a felvetett kérdésre az a felelet, hogy az egyensúly a G helyen* $1+\lambda>0$ *esetén mindenesetre labilis.*

Az U Taylori sorának másodfokú tagját ugyanis U_2-vel jelölve

$$V=\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}x'^2+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}z'^2+2\frac{\partial^2 U_2}{\partial y\partial z}y'z'+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 U_2}{\partial z\partial y}z'x'+2\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\partial y}x'y'\right)+\overline{V},$$

hol $\overline{V}$ az x, y, z-ben legalább elsőfokú taggal kezdődvén, a V jellegét a G környezetében a zárójelbe írt első tagja határozza meg. Ámde ép úgy mint U_2 az x, y, z-ben ez első tag az x', y', z'-ben négyzetes definit positiv alak. A (8) egyszerű megtekintése azt mutatja tehát, hogy esetünkben a $\frac{d^2U}{dt^2}$ sehol se negativ egy a G-t tartalmazó olyan tartományban, a melyben x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz értékei az 1-hez képest eléggé kicsinyek; a miből az következik, hogy ha csak $\frac{dU}{dt}$ kezdőértéke e tartomány bármely P_0 pontjában positiv, későbbi értékei csak nagyobbak lehetvén a kezdőértéknél, az U monoton és mind gyorsabban nő. Minélfogva az anyagi pont a tartományt, bármelyik helyről bármilyen kicsiny sebességgel induljon is ki, véges idő alatt hagyja el.

IV. Ha az U Taylori kifejtésében

$$U=U_{2n}+U_{2n+1}+\cdots,$$

az $n>1$, akkor az előbbi következtetések abban a speciális esetben ismételhetők, a midőn nemcsak az U_{2n} maga, hanem az U_{2n}-nek Hesse-féle determinánsa, valamint ennek főminorai is positiv alakok. Ebben az esetben ugyanis a V legalsóbbrendű tagja

$$\frac{\partial^2 U_{2n}}{\partial x^2} x'^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 U_{2n}}{\partial x \partial y} x'y' \tag{11}$$

az x', y', z'-ben definit positiv alak.

Így például ha $n=2$ lévén, az U legalacsonyabbrendű tagja U_4 nemcsak definit positiv, hanem

$$2U_4 = \sum_{i=1}^{3} f_i^2,$$

hol f_i in specie positiv definit négyzetes alak, akkor az előbbi következtetések szóról-szóra ismételhetők abból az okból, mert most az U_4 HESSE-féle determinánsa és ennek főminorai is positiv definit alakok.

Ugyanis

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_i^2 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 + f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2},$$

ép úgy $\frac{\partial^2 f_i^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f_i^2}{\partial z^2}$ ez esetben positiv alakok. Továbbá

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y} + f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}, \ldots$$

lévén, áll, hogy

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial y \partial y} \end{vmatrix} = f_i^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial y \partial y} \end{vmatrix}$$

$$+ f_i \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y}\right),$$

minélfogva a jobboldali mindkét tag positiv alak.

Végül

$$\frac{1}{8}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f_i^2}{\partial z^2} \end{vmatrix} = f_i^2 A + f_i^3 H,$$

hol

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial z \partial z} \end{vmatrix}$$

és

$$A = a_{xx}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 + a_{yy}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2 + a_{zz}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)^2 +$$

$$+ 2a_{xy}\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y} + 2a_{yz}\frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial f_i}{\partial z} + 2a_{zx}\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial x},$$

ha az a_{xx} a H determinánsban a $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial x}$ főtaghoz adjungált minor, míg a_{xy} a $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}$-hoz adjungált minor stb.

Miután $H>0$, az A pedig definit positiv alak, tehát állításunk be van bizonyítva.

Nyilt kérdés marad, hogy abban az esetben, a midőn $1+\lambda>0$, de az U_{2n} Hesse-féle determinánsának nincs meg ez a *nagyon* speczialis tulajdonsága, szóval általánosan megmutatható-e vagy sem, hogy mindig létezik olyan irányú kezdősebesség, melylyel az anyagi pont a G környezetéről kiindulva, egy megjelölhető tartomány határát véges idő alatt hagyja el? Bizonyos azonban, hogy mihelyt az U_{2n} Hesse-féle determinánsa maga, valamint főminorai is positiv alakok, a (11) is positiv definit alak, minélfogva a $\frac{d^2U}{dt^2}$ a (8) egyenletből folyólag feltétlenül positiv a G környezetében. Az U_{2n} Hesse-féle determinánsának e tulajdonságából magára az U_{2n}-re nézve a (11) alakból az következik, hogy a kezdőpontot kivéve (hol $=0$) mindenütt másutt >0: ez következik, ha a (11)-ben x', y', z' helyett sorban x, y, z tétetik.

E szerint kimondható a következő tétel:

Ha a szabadon mozgó anyagi pontra az U potencziálos erőn kívül még olyan erő is hat, melynek iránya mindenkor a pálya első görbületi sugarába esvén mozgásegyenletei a (7) *egyenletek; ha továbbá az U Taylor-sora első nem identice eltűnő tagjának U_{2n}-nek Hesse-féle determinánsa úgy maga mint főminorai a G ponton kívül, hol zérusok, mindenütt másutt positivok, akkor föltéve, hogy a* (7) *egyenletbeli* $1+\lambda>0$, *az anyagi pontnak a G helyen labilis az egyensúlya.*

V. Végül áttérek azon eset megvizsgálására, a midőn a potencziálos erőn és a görbületi sugár irányában ható erőn kivül még a negativ sebesség irányában is működik egy erő: az $f(v)$ nagyságú közegellenállás. Rögtön belátható, hogy a (8) egyenlet helyére akkor ez lép:

$$\frac{d^2U}{dt^2}=\left(Q^2\cos^2(Q,v)+(1+\lambda)^{-1}Q^2\sin^2(Q,v)+V\right)-\frac{f(v)}{v}\frac{dU}{dt}, \quad (12)$$

hol Q és V ugyanazok, mint a (8)-ban. Ez egyenlet alakja ugyanaz, mint a (2) egyenleté, csak U áll az r helyén és a jobb oldalon a zárójelben más mennyiség foglal helyet. Ámde az U ép úgy mint r helyhatározó. Azért mindazon esetekben, a melyeket az előző IV. czikkben részleteztünk, a midőn t. i. a jobb oldalon zárójelbe foglalt összeg a G helyen kívül mindenütt másutt positiv, ugyanazok a következtetések vonhatók a (12)-ből az U függvényre nézve, mint a milyeneket a II-ben a (2) egyenletből vontunk volt az r távolságra nézve. Egy szóval, *ha csak az U Taylor-sorának ugyanaz a jellege mint előbb, a mellett* $(1+\lambda)>0$, *az* $f(v)$ *értéke pedig v-vel egyidejűleg monoton végtelen kicsinynyé fogy, akkor a szabadon mozgó anyagi pont azon a helyen, a hol U minimum, labilis egyensúlyban van.*

Az anyagi pont mozgási egyenletei az V-beli feltevések esetén

$$x''=\frac{\partial U}{\partial x}-\lambda v\frac{d}{dt}\frac{x'}{v}-f(v)\frac{x'}{v},$$

. . . .

tehát

$$\frac{\partial U}{\partial x}=(1+\lambda)x''+\left(f(v)-\lambda\frac{dv}{dt}\right)\frac{x'}{v}.$$

. . . .

Ez egyenletek formailag azonosak azokkal, a melyekre az OSTWALD-elv általánosítását czélzó vizsgálataimban (szabad pontra vonatkozólag) vezettettem.[1] Épen ez a körülmény indított volt engemet a III., IV. és V.-ben tárgyalt kérdéstételekre.

Réthy Mór.

[1] Math. és Phys. Lapok 1904, 116. és 121. lap.

EGY SZÁMELMÉLETI TANTÉTEL.

Páratlan primszám-modulusra vonatkozólag a

$$z \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, p-1,\ \infty \pmod{p}$$

elemeket mozgató

$$\left(z, \frac{a}{a-z}\right) a \equiv 1,\ 2,\ 3, \ldots, p-1 \pmod{p}$$

permutatiók között csak egy van olyan, a melyik p számú elemet mozgat, az t. i., a melyre nézve a

$$z \equiv \frac{a}{a-z} \pmod{p}$$

congruentiának[1] csak egy gyöke van. Ennél a permutationál

$$a \equiv 4 \pmod{p}.$$

A

$$P = \left(z, \frac{4}{4-z}\right)$$

permutatióban helyén maradó elem a 2. A megmozgatott elemek szükségképen egy p-edrendű cyklust alkotnak. Mert P tagja a

$$\left(z, \frac{\lambda z+\mu}{\nu z+\rho}\right) \lambda\rho-\mu\nu \not\equiv 0 \bmod. p)$$

---

[1] $\frac{a}{b} \pmod{p}$ azt az egész számot jelenti, a mely a $bx \equiv a \pmod{p}$ congruentiát kielégíti.

$\frac{a}{b} \equiv \infty \pmod{p}$ azt jelenti, hogy

$$a \not\equiv 0, \quad b \equiv 0 \pmod{p}$$

permutatio-csoportnak, a melynek pedig az identikus permutatión kívül egy tagja sincs olyan, a melyik kettőnél több elemet helyén hagyna. Már pedig ha a P permutatiótól megmozgatott p számú elem több cyklusra oszolnék, volna közöttük legalább egy páratlan rendszámu. P-nek ilyen magas hatványa ennek elemeit (tehát kettőnél többet) helyükön hagyná a nélkül, hogy identikus permutatio volna. Mert primszámszámú megmozgatott elemet lehetetlen egynél több egyenlő rendszámú cyklusba szétosztani.

P cyklusában az elemek sorrendje:

$$\infty,\ 0,\ \frac{4}{4},\ \frac{4}{4-\frac{4}{4}},\ \frac{4}{4-\frac{4}{4-\frac{4}{4}}}\cdots \pmod{p},$$

tehát ebben a számsorozatban a 0-t követő tagok között a $(p-1)$-ik az első, a melynek nevezője $\equiv 0 \pmod{p}$.

Ezek alapján kimondhatjuk a következő tantételt:

4 az egyetlen szám, a mely mellett tetszésszerinti páratlan primszám-modulusra (p) vonatkozólag az

$$a,\ a-\frac{a}{a},\ a-\frac{a}{a-\frac{a}{a}} \qquad A)$$

számsorozatban a $(p-1)$-ik tag az első, a mely p-vel osztható. Az ezt megelőző tagok osztási maradékai permutatióját alkotják az

$$1,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots, p-1$$

számoknak.

Hogy az $A)$ számsorozat $(p-1)$-ik tagja csak akkor osztható p-vel, ha $a \equiv 4 \pmod{p}$, egyenes számolással is igazolhatjuk.

Legyen az $A)$ számsorozat n-ik tagja közönséges tört alakjára hozva $\frac{F_n}{A_n}$.

$$\frac{F_{n+1}}{A_{n+1}} = a - \frac{aA_n}{F_n},$$

azért tehetjük

$$A_{n+1} = F_n$$
$$F_{n+1} = aF_n - aA_n = aF_n - aF_{n-1}$$

az az egyenlet $n=1$ esetére is áll, ha $F_0 = 1$ teszszük.

Az

$$\begin{aligned} &F_{n+1} - aF_n + aF_{n-1} = 0 \\ &F_0 = 1, \quad F_1 = a \end{aligned} \qquad B)$$

egyenletek azt mutatják, hogy F_n coëfficiense z^n-nek az

$$\frac{1}{1 - az + az^2}$$

függvénynek z positiv egész hatványai szerint haladó sorában.

Azonban

$$\frac{1}{1 - az + az^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n (1-z)^n$$

és így

$$F_n = \sum_{k=0}^{h} (-1)^k \binom{n-k}{k} a^{n-k} \left(h = \frac{n}{2} \text{ vagy } \frac{n-1}{2}\right),$$

tehát

$$F_{p-1} = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p-1-k}{k} a^{p-1-k} \equiv \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{2k}{k} a^{p-1-k} (\text{mod.}\, p).$$

Azonban

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!\,k!} = \frac{1.3.5\,..\,(2k-1)}{k!} 2^k \equiv$$

$$\equiv (-1)^k \binom{\frac{p-1}{2}}{k} 4^k \ (\text{mod.}\, p).$$

Tehát

$$F_{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (a-4)^{\frac{p-1}{2}} \ (\text{mod.}\, p),$$

a miből tisztán látható, hogy F_{p-1} csak akkor osztható p-vel, ha $a \equiv 4$, mert az $a \equiv 0$ esetet kizártuk volt.

Hogy ugyanekkor $A_{p-1}=F_{p-2}\not\equiv 0$, az a *B)* egyenletekből következik. Mert ezek szerint $F_{p-1}\equiv F_{p-2}\equiv 0$ azt vonná maga után, hogy $F_{p-3}, F_{p-4}, \ldots, F_1, F_0$ mindenike $\equiv 0$ kellene, hogy legyen. Ez pedig lehetetlen, mert $F_0=1$.

Megjegyzendő, hogy a

$$\left(z, \frac{1}{a-z}\right) (a\equiv 1, 2, \ldots, p-1 \bmod. p)$$

permutatiók segítségével hasonló tantételt lehet kimondani a ± 2 számokra és az

$$a, a-\frac{1}{a}, a-\frac{1}{a-\frac{1}{a}}, \ldots$$

számsorozatra vonatkozólag.

Vályi Gyula.

AZ ELEKTRON-ELMÉLET EREDMÉNYEI ÉS PROBLEMÁI.

(H. A. LORENTZ előadása.)

(Második közlemény.)

Most áttérek arra az erőre, mely az elektronra hat; erre vonatkozólag is teljesen a MAXWELL-féle elmélet alapjára helyezkedünk. Az erőt az elektron helyén veszteglő éther fejti ki, s azt *közvetlenül* ennek az éthernek állapota határozza meg; az erő csak *közvetve* függ a mezőt gerjesztő elektronoktól.

Ha az elektron nyugalomban van, akkor a reá ható erőt az étherben ható elektromos erőnek az elektron töltésével való szorzata adja meg. De ha a részecske mozgásban van, akkor ehhez még egy új erő járul, mely merőlegesen áll arra a sikra, melyet a mozgás iránya a mágneses erővel meghatároz, s a melynek nagyságát nyerjük, ha a töltést megszorozzuk a sebességgel, a mágneses erővel és azon szögnek sinusával, melyet ezen utóbbi két vektor bezár.

Hogy a hatás irányát teljesen megállapíthassuk, gondoljunk abban a sikban egy a 180°-nál kisebb olyan forgásra, melylyel a sebesség irányát a mágneses erő irányába átvezethetjük, s helyezzünk a sikra egy órát olyként, hogy mutatóinak járása ezen forgás értelmével megegyezzék. Az elektronra ható erő az óralaptól a hátlap felé irányul vagy ellenkező irányú, a szerint, a mint az elektron töltése pozitiv, illetőleg negativ.

Általában egy tetszésszerinti mezőben az a hatás, melyet az elektron elszenved, ezen két részből tevődik össze, melyeket egymástól az *elektrosztatikus* és *elektromagnetikus* erő elnevezéseivel lehet megkülönböztetni. Az elsők összegezésével számítjuk ki a mezőnek egy töltéssel biró vagy egy elektromosan polarizált test valamennyi elektronjára kifejtett összes hatását, tehát az összes elektrosztatikus erőket. Az erőnek második részével magyarázzuk meg az elektrodynamikus hatásokat és a ponderabilis testekben mutatkozó összes indukcziójelenségeket.

Míg ily módon a Maxwell-féle elmélet alapelveihez hűek maradtunk, az elektronok fölvételével Maxwellt túlhaladjuk. Ezzel áll kapcsolatban az éthernek az új elméletben mutatkozó jelentősége is. Az éther nem olyan dielektrikum többé, mint a milyenek a többiek, melynek pusztán kisebb a dielektromos állandója, hanem sajátos természetű dielektrikum, tulajdonképen az egyetlen közeg, melyet elképzelünk; mert hiszen ez a közeg minden testet átjár, tehát minden erőhatást ez közvetít. Ha szabadna azt föltételeznünk, hogy két egymásra ható molekulát vagy atomot mindig még egy igen kicsiny távolság választ el, akkor azt állíthatnók, hogy nincsen olyan erőhatás, melynél az éther szerepet nem játszik. Ez nem csupán az elektromos és mágneses vonzásokra és taszításokra nézve áll, hanem épen úgy érvényes az összes molekuláris erőkre és chemiai hatásokra, áll arra a nyomásra, melyet valamely testre kifejtünk, áll arra az erőre, melylyel egy kifeszített kötél összehúzódik. A mi már most a ponderabilis dielektrikák különleges tulajdonságait illeti, melyekben ezek az éthertől különböznek, úgy ezeket azzal a föltevéssel magyarázzuk meg, hogy molekuláik elektronokat tartalmaznak, melyek bizonyos egyensúlyi helyzetekhez vannak kötve, de ezekből elektromos erőktől kimozdíttathatnak. Ha ez a kimozdítás bekövetkezett, akkor a testet elektromosan polarizáltnak mondjuk, s ebben a polarizáczióban áll épen a dielektromos eltolódásnak az anyaghoz kötött azon része, melyről már megemlékeztünk.

Vizsgálódásaink további folyamán találok még alkalmat arra, hogy az elektron-elmélet czélszerűségét és termékenységét példákon igazoljam. Egyelőre csak azt hangsúlyozom, hogy szorosan csatlakozunk a fizika molekuláris elméleteihez és a chemiai atomisztikához, különösen pedig az ion-elmélethez, mely az elektrolyzis tüneményeinek magyarázatánál oly hasznosnak bizonyult és a gáz-ionok tanához, mely a kisülések rejtelmes tüneményeinek megértését tetemesen megkönnyítette.

Mindenesetre meg kell engednünk, hogy azon törekvéseinkben, melyek a tünemények mechanizmusának kifürkészésére irányulnak, csupán a legeslegelső lépéseket tettük meg, s ha tovább haladni akarunk, akkor mindig ügyelnünk kell arra, hogy elméleti spekulácziókba el ne merüljünk. Épen így el kell ismernünk, hogy sok esetben más utak, melyeken a lehetőség szerint általános és mindenkitől elismert alapelvek szerint igazodunk, épen olyan, vagy esetleg nagyobb sikerrel követhetők; ide tartoznak az összes thermodynamikai megfontolások. Sajátságos inger rejlik továbbá abban, hogy a tünemények rejtett mechanizmusával nem törődve, azok nagy sokaságát csekély számú egyenletek rendszerébe foglaljuk, mint azt például Voigt és Cohn a legszebb sikerrel tették, s a mely módszerrel közülök az első magneto-optikai téren oly következtetésekre jutott, a melyek az elektron-elméletre nézve még rejtve maradtak.

Az ilyen megfontolások bennünket mindenesetre óvjanak meg attól, hogy a tünemények egy bizonyos felfogását a legjobbnak vagy a legkielégitőbbnek jelentsük ki; ne akadályozzanak meg minket abban, hogy azon az úton, melyet a legkilátásosabbnak tartunk, lehetőleg messzire hatoljunk. A tudománynak csakis haszna lehet abból, ha mindenki a maga módja szerint jár el.

*

A mit ezen bevezető megfontolások után mondandó leszek, az részint az étherben szabadon mozgó, részint a ponderabilis testekbe zárt elektronokra fog vonatkozni, mi mellett azt a megjegyzést vetjük közbe, hogy ezen utóbbiak kapcsán azon töltésekkel ellátott részecskékről is szó lesz, a melyeket rendszerint ionoknak szoktak nevezni.

Szabad elektronokkal állunk szemben a kathodsugarak, a csatornasugarak és a BECQUEREL-sugarak eseteiben. A kathodsugarak általában ismereteseknek tekinthetők. A csatornasugarakat GOLDSTEIN fedezte föl, s ezek kedvező viszonyok közt akkor jelentkeznek, ha oly kisülési csővel dolgozunk, melynek átlyukgatott kathodja van. A sugarak itt a kathod hátulsó, az anodtól elforduló oldalán keletkeznek, s a lyukakból látszanak kiindulni. Ezek tehát oly sugarak, melyek az anodon keletkeznek, s a kathod nyilásain hatolnak keresztül.[1] A mi végre a BECQUEREL-sugarakat illeti, úgy ezen csudálatos tünemények fölfedezése az elektron-elmélet szempontjából épen jókor jött; az elmélet számára újabb próbakövekül szolgáltak, s nekik az elektronok természetét illetőleg fölötte fontos értesüléseket köszönhetünk. Különösen a radiumsugarakról fogunk szólni, megjegyezvén, hogy azoknak három faját különböztethetjük meg, melyek α, β és γ sugarak nevén ismeretesek.[2]

Hogy a nevezett sugarak legföljebb egynek kivételével elektronokból állanak, melyek a sugár mentén tovarepülve, a vizsgálatukra szolgáló lemezbe ütközvén, azon fotografikus benyomást vagy fluoreszczencziát idéznek elő, azt különféle tüneményekből lehetett következtetni. Némely esetekben közvetlenül abból, hogy a sugarak az azokat felfogó testet bizonyos elektromos töltéssel látják el, s viszont az a test, a melyből kiindultak, ellenkező töltéssel marad vissza.

2. Jegyzet. A kivételt a γ-sugarak alkotják. Ezek épen úgy mint a RÖNTGEN-sugarak a legnagyobb valószínűség szerint olyan elektromagnetikus rázkódtatásokból állanak, melyek a fény sebességével terjednek tova.

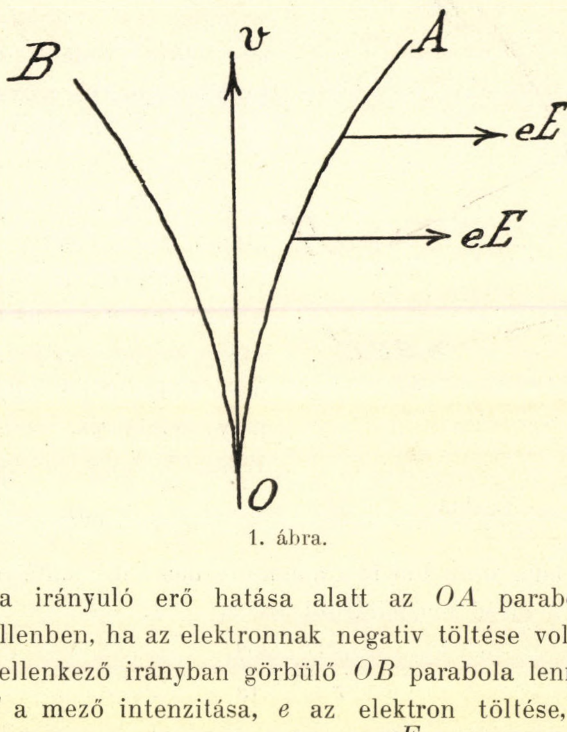
*

[1] Lásd dr. BOZÓKY ENDRE: Az elektromos sugárzásokról czimű értekezését, mely «A természettudományok elemei»-nek IV. füzeteként jelent meg 1905-ben.

[2] Lásd SKLÓDOWSKA CURIE: Radioaktiv anyagokra vonatkozó vizsgálatok; a 2. kiadás után fordította ZEMPLÉN GYŐZŐ. M. Ph. L. XIII. és XIV. köteteiben.

A mi szempontunkból főleg azon változások jönnek tekintetbe, melyeket a sugarak lefolyásában egy elektromos vagy mágneses mező képes létrehozni.

Gondoljuk első sorban azt, hogy egy elektron egy homogén elektromos mezőben végzi mozgását, s a mező erővonalai eredeti mozgásának irányára merőlegesek. Rajzunkban (1. ábra) haladjanak balról jobbfelé. Ha az O elektronnak fölfelé irányított v sebessége van, töltése pedig pozitiv, akkor ez egy állandó



1. ábra.

és jobbra irányuló erő hatása alatt az OA parabolát fogja leírni. Ellenben, ha az elektronnak negativ töltése volna, akkor útja az ellenkező irányban görbülő OB parabola lenne.

Ha E a mező intenzitása, e az elektron töltése, m pedig tömege, akkor konstans gyorsulása $= \frac{eE}{m}$, s a pálya O pontjára vonatkozólag az r görbületi sugarat

$$\frac{v^2}{r} = \frac{eE}{m} \tag{1}$$

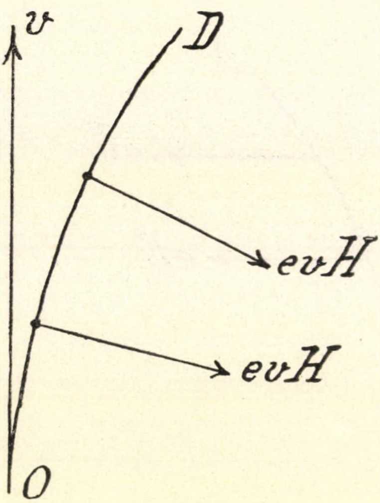
alapján számíthatjuk úgy, hogy ha a megfigyelések r és E értékeit szolgáltatják, akkor a képletből

$$\frac{e}{mv^2} \qquad (2)$$

vezethető le.

Hasonló irányváltozást szenvednek a sugarak a mágneses mezőben is, csakhogy, ha a sugár iránya eredetileg merőleges volt az erővonalokra, akkor a sugár egy ezekre merőleges síkban folytatja útját.

Gondoljuk, hogy a homogén mező erővonalai rajzlapunkra (2. rajz) merőleges állásuak és a szemlélő felé irányulók, akkor egy fölfelé haladó részecske jobbra hajló OD pályát fog leírni, ha töltése pozitiv, balra hajlót, ha töltése negativ.



2. ábra.

A v sebesség most állandó marad, mert az erő iránya folyvást merőleges a mozgás irányára; ennélfogva az erő nagysága is változatlan marad, úgy, hogy ennek folytán körpálya keletkezik. Ha tekintetbe veszszük, hogy az erőt

$$evH$$

kifejezés adja meg, hol H a mágneses mező intenzitását jelenti, akkor az r küllő meghatározására a

$$\frac{v^2}{r} = \frac{evH}{m} \qquad (3)$$

képletet nyerjük, melyből, ha a mezőnek H intenzitása és a görbület kisérletileg megállapittattak,

$$\frac{e}{mv} \qquad (4)$$

értéke számítható.

Mindezekből látható, hogy ha legalább is a mozgás iránya kétségtelen, akkor annak megfigyeléséből, hogy az elektromos, illetőleg a mágneses kitérítés mily értelemben történik, az elektromos töltés előjelére kaphatunk felvilágosítást. Továbbá, és ez igen nevezetes, hogy ha egyazon sugárzásra nézve mindkét kitérítést megállapitottuk, akkor a v sebesség és $\frac{e}{m}$ arány értékeit megadhatjuk; mert ha a (2) és (4) kifejezések ismeretesek, akkor belőlük v és $\frac{e}{m}$ kiszámíthatók.

*

Vannak esetek, a melyekben már pusztán a mágneses mező hatásának megfigyelése is elegendő arra, hogy az $\frac{e}{m}$ arányt meghatározhassuk. Az effajta tünemények közül az első, melynél azonban már nem *szabad* elektronokkal van dolgunk, az a ZEEMANtól fölfedezett változás, melyet a kibocsátott sugarak rezgésszáma akkor szenved, ha egy gáznemű fényforrás mágneses mezőben foglal helyet. Az emisszióra nézve a legegyszerűbb felfogás abban áll, hogy a fényt kibocsátó gáz minden molekulája egyetlenegy mozgékony elektront tartalmaz, a melyet, ha az egyensúlyi helyzetből r-nyire eltávolodott, abba egy ezen távolsággal arányos erő hajtja vissza. Ha k-val egy állandó mennyiséget jelölünk, akkor ezen erő kifejezése $K=kr$. A mechanika egyszerű tételei értelmében az elektron rezgési ideje

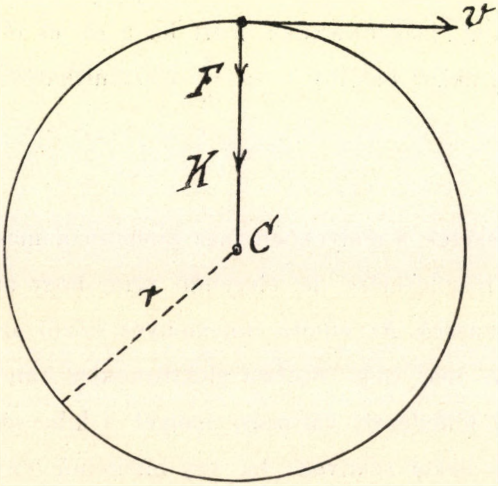
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

hol még

$$n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

is írható, ha n a szaporaság (frequentia), vagyis a 2π-nyi időtartamra jutó rezgések száma. Ugyanez lesz annak a sugárzásnak szaporasága is, melyet e részecske sebességének változásainál fogva létrehoz.

Tekintsünk már most (3. rajz) egy köralakú rezgést, oly síkban, mely a H mágneses erő irányára merőlegesen áll.



3. ábra.

Ennél a kör C középpontja felé irányuló $K = kr$ erő mellett még egy $F = evH$ erő is tekintetbe jön. Minthogy

$$v = \frac{2\pi r}{T} = nr,$$

tehát

$$F = enHr$$

alakban is írható. Ezen F erő a K-val vagy egyező, vagy ellenkező irányú. Ez függ a mozgás irányától, a mágneses mező irányától és az e töltés előjelétől. Ez az új erő a valóságban a kr-hez képest igen csekély; ennélfogva azt mondhatjuk, hogy a k állandó a F fellépése miatt az igen kicsiny

$$\delta k = enH$$

változást szenvedi. Ennek (5) szerint a szaporaság

$$\delta n = \tfrac{1}{2} H \frac{e}{m} \tag{6}$$

változása felel meg, mely változás az egyik vagy a másik értelemben fog bekövetkezni. Ha az egyik mozgási irány mellett a rezgési idő megnövekszik, akkor az ellenkező irányú mozgásnál ez csökkenni fog.

Megjegyzendő továbbá az is, hogy a mágneses mező egy az erővonal mentén mozgó elektronra hatással nincsen, minélfogva tekintetbe vett részecskéinknek az erővonalakkal párhuzamos, tehát rajzunk síkjára merőleges irányú rezgéseit a mező nem afficziálja. Minthogy minden tetszésszerinti rezgés egy ilyen egyenes vonalú és két a rajz síkjában fekvő, ellenkező értelmű czirkuláris rezgésre bontható fel, ennélfogva arra következtethetünk, hogy a mágneses mező hatásánál fogva az egyetlenegy n rezgésszám helyett három fog föllépni

$$n,\ n+\delta n,\ n-\delta n;$$

minélfogva a fény spektrális szétbontásakor nem egyszerű vonalat, hanem háromszorosat, ú. n. *vonaltripletet* fogunk észlelhetni.

Ezt ZEEMAN tényleg észlelte is; de figyelmeztetnem kell arra, hogy ez a róla elnevezett tüneménynek legegyszerűbb esete; mert a legtöbb spektrálvonal sokkal bonyolultabb módon bomlik szét.[1]

Ha tényleg *triplettel* van dolgunk, akkor az összetevők távolságainak mérése δn értéket adja meg, s így ha ismeretes a mezőnek H intenzitása, akkor a (6) képlet alapján $\frac{e}{m}$ értéke lesz számítható. Ily módon végezte ZEEMAN ezen aránynak legelső meghatározását. Megfigyeléseiből következtetést vonhatott arra is, hogy a rezgései folytán fényt létrehozó mozgékony elektronnak milyen nemű a töltése?

*

[1] Lásd: *Az atomoknál kisebb részecskékre vonatkozó kisérleti vizsgálatokról* czímű czikket, ZEEMAN után fordította dr. BOZÓKY ENDRE. Math. és Phys. Lapok X. évf., p. 157—171.

Már előadásom elején megjegyeztem, hogy minden ponderabilis test molekuláiban elektronok jelenlétét tételezzük föl, melyek mindannyiszor vele rezgésbe jönnek, valahányszor a testet fénysugár éri. E mellett a mozgás okát azon folyvást változó elektromos erőkben kell keresnünk, a melyek a fénysugárban érvényesülnek. Hogy a velerezgés mekkora mértékben jön létre és milyen befolyással lesz a testen keresztül végbemenő fénymozgásra, különösen a terjedési sebességre, az azon erők nagyságaitól függ, a melyek az elektront egyensúlyi helyzetébe visszaterelni törekszenek.

Képzeljük már most azt, hogy a test mágneses mezőbe kerül, s a testen át az erővonalok irányában czirkulárisan jobbra vagy balra polarizált fény halad, melynek sugaraiban tehát a sugár irányára merőleges körrezgések mennek végbe. Az együttrezgő elektronra ható erőt, mely köralakú pályájának középpontja felé irányul, épen úgy, mint ezt a ZEEMAN-féle tünemény esetében megállapítottuk, a mező hatása az egyik mozgásirány esetében erősíti, az ellenkező esetében pedig gyöngíti. Ebből a czirkulárisan jobbra, illetőleg balra polarizált fények terjedési sebességeire nézve egyenlőtlenség jön létre, mely egyenlőtlenség az optikának egy ismeretes tétele alapján abban nyilvánul, hogy egy egyenes vonalúlag polarizált fénysugár rezgési iránya a testen való áthatolás közben elfordulást szenved. Ezen már régóta ismeretes ténynek tehát alapjában véve ugyanaz az oka, mint a ZEEMAN-féle effektusnak, s így könnyen megérthető, hogy azt épen úgy felhasználhatni az $\frac{e}{m}$ arány meghatározására, mint emezt. A lemért elforgatási szögekből SIERTSEMA az arány néhány értékét tényleg megállapította.

*

Eddig folytonosan az $\frac{e}{m}$ arány értékéről volt szó. A mi magának e-nek, vagyis az egyes részecske elektromos töltésének értékét illeti, ezt J. J. THOMSON Cambridgeben a gáz-ionokra vonatkozólag az ő szellemes ködmódszerével különböző esetekben megállapitotta. Ha az ionizált gáz vízgőzt tartalmaz, akkor, mint azt C. T. R. Wilson észlelte, annak adiabatikus kitágulása közben beálló lehülésekor köd keletkezik, mi mellett az ionok mint sűrűsödési magvak szerepelnek. Föltehető, hogy minden ion körül egy-egy vízcsöppöcske alakul. Ezen csöppöcskék nagyságát Thomson a köd leszállásának sebességéből állapitja meg, mi közben arra az elméleti eredményre hivatkozik, hogy egy a levegőben aláeső igen kicsiny golyócskának végsebessége könnyen megadható módon függ a golyó súlyától, küllőjétől és a levegő surlódási együtthatójától. Ha továbbá ismerjük a megsűrűsödött gőznek mennyiségét, akkor a vízcsöppöcskék, s ezzel együtt az ionok számát is egyszerűen osztás útján találhatjuk; hogy tehát az egyes ion töltését nyerhessük, csupán azok összes töltését kell absolut egységekben kifejezve megállapitanunk, a mi tényleg lehetséges.

Most még csak arra kell önöket figyelmeztetnem, hogy az elektrolytek ionjaira nézve az $\frac{e}{m}$ arány értékét azok elektrochemiai egyenértékeiből lehet kiszámítani, s hogy a kinetikai gázelmélet alapján az ilyen ion tömegének megbecsülése is lehetséges, s így az e töltés értéke szintén ismeretessé válik; ezek után arra térhetek át, hogy önöket az elért eredmények egynémelyikével, s az ezekre alapitott következtetésekkel és hypothezisekkel megismertessem.

I. Táblázat.

	$\frac{e}{m}$		v
A) Hydrogen-ionok	9650		
B) *Negativ elektronok:*			
1. Zeemann-effektusból	1·6— 3		
2. A polarizáció sikjának elfordulásából	0·9—1·8		
3. Kathodsugarak *Simon* szerint	1·86	$\times 10^7$	0·1—0·3
4. Más észlelők szerint	0.7—1·4		
5. Ultraibolya fénnyel megvilágitott zinklemez segitségével	0·7*		0·95-ig
C) *Pozitiv elektronok:*			
1. Csatornasugarak	300—9000		
2. α-sugarak	6000		0·07

Az $\frac{e}{m}$ arány értékeinek egynémelyikét az I. táblázatban állítottam össze, melyből az is kitűnik, mely esetekben van negativ elektronokkal dolgunk, mely esetekben pozitivokkal. Ezen számadatoknál, melyek közül különben többen csupán a nagyság rendjét tüntetik föl és a még ezután következőknél a *CGS*-rendszer és a szokásos elektromagnetikus egységek vétettek alapul.

3. Jegyzet. Szerző az «*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*»-ben kevéssel ezelőtt megjelent, s a Maxwell-féle, valamint az elektron-elméletre vonatkozó czikkeiben Hertz és Heaviside nyomán más mértékrendszert használ, olyant, mely elméleti fejtegetéseknél bizonyos előnyöket nyujt. Ezen alkalommal azonban tanácsosabbnak tartotta az általában szokásos egységeket felhasználni.

Azonnal feltűnik, hogy $\frac{e}{m}$-nek a negativ elektronokra vonatkozó értékei sokkalta nagyobbak, mint a pozitivokra vonatkozók, s hogy az elsőkre vonatkozó számadatok meglehetősen szűk határok közt mozognak. Ebből arra lehetett következtetni,

* Ezen adat kicsiny sebességekre vonatkozik.

hogy a megvizsgált esetekben tekintetbe vett negativ elektronok sem tömeget, sem töltést illetőleg egymástól tetemesebb eltérést nem mutathatnak.

A töltések nagyságát illetőleg meg kell emlékeznünk arról, hogy molekulár-elméleti megfontolások alapján a hydrogénion tömege körülbelül 10^{-24} grammnyira becsülhető, s így az elektrochemiai æquivalens kapcsán egy ilyen ion töltése

$$e = 10^{-20}$$

értékűnek vehető. Igen figyelemreméltó az a körülmény, hogy THOMSONnak a gáz-ionokra vonatkozó kisérletei oly értékekre vezettek, melyek az észlelési hibák határain belül ezzel a számadattal jól megegyeznek.

*

Tudvalevőleg az elektrolytekben az egyértékű ionok, akár pozitivok, akár negativok, oly töltésekkel birnak, melyeknek számértékei egyenlőek, s hogy a két-, háromértékű ionok töltései az egyértékűek töltéseinek kétszeresei, háromszorosai stb. Ezek a törvényszerűségek már régebben arra a nézetre vezettek, hogy az egyértékű ion töltése valóságos *elemi quantum*, úgyszólván atomja az elektromosságnak, melynek csupán többszörösei szerepelhetnek, de törtrészei nem fordulhatnak elő. Ezzel a felfogással THOMSON eredményei jól megegyeznek, s igy arra a föltevésre jutunk, hogy: *a természetben van egy meghatározott elektromossági elemi quantum, s nemcsak az egyértékű ionok, hanem a megvizsgált gáz-ionok és a negativ elektronok is akkora töltésnek hordozói.*

A mi ezen föltevésnek a negativ elektronra való kiterjesztését illeti, arra nézve megjegyzendő, hogy a negativ elektron töltésének közvetlen mérése eddigelé még nem sikerült. De közelfekvő gondolat, ezeket az elektronokat a létező alakulatok legegyszerűbbjéül tekinteni, s nekik a lehető legkisebb töltést tulajdonitani. Ehhez járul még az is, hogy van $\frac{e}{m}$-nek *egy* meghatározása és e-nek *egy* mérése, mely azokra a töltésekkel ellátott részecskékre vonatkozik, a melyek a környező gázba kerülnek, ha egy negativ töltésű zinklemezt ultraibolya fénynyel világitunk meg; csakhogy az erre vonatkozó méréseknél a gáz különböző fokú ritkitással alkalmaztatott. Ha a nyomás igen kicsiny, akkor valóságos kathodsugarak keletkeznek, mint azt táblázatunkban $\frac{e}{m}$ értéke is bizonyítja. Magasabb nyomásokon gáz-ionokkal van dolgunk; de ha ezeket olyként keletkezetteknek gondoljuk, hogy az eredetileg származó kathodsugarak negativ elektronjai meghatározott számú levegőmolekulát kötnek le, akkor a gáz-ion töltésének ugyanakkorának kell lennie, mint azon elektroné, mely neki magul szolgál.

Különben optikai tünemények is a mellett bizonyitanak, hogy az elektron töltése nagyságát illetőleg ugyanakkora rendű, mint az elektrolytikus ioné.

4. Jegyzet. Itt arra a befolyásra gondolunk, melyet a ponderabilis anyag a különböző színű fény tovaterjedési sebességére kifejt, azon befolyásra, melytől a törésmutató értékei függenek, s a melyeket együttrezgő elektronok fölvételével magyarázhatunk.

Egyszerűség okáért szorítkozzunk egy olyan magas ritkítású gázra, melynél a molekulák kölcsönös hatását már nem kell tekintetbe vennünk és tegyük föl, hogy minden molekula csakis egy e töltésű és m tömegű elektront tartalmazzon. Ennek a részecskének legyen meghatározott egyensúlyi helyzete, mely felé azt, ha belőle r nyire kimozdíttatott, egy a kimozdulással arányos erő tereli vissza. Ezt az erőt kr-rel fejezzük ki, hol k egy a molekula természetétől függő állandót jelentsen.

Mint az mindjárt ki fog tünni, a tekintetbe vett esetben az r elmozdulást a molekulára ható E elektromos erővel arányosnak vehetjük. Ha tehát

$$r = sE$$

és ha N-nel jelöljük a térfogategységben foglalt molekulák számát, akkor az elektromagnetikus fényelmélet a törésmutató értéke számára a következő kifejezést szolgáltatja:

$$\nu = \sqrt{1+hseN},$$

hol h egy a választott egységektől függő állandót jelent.

Ha a szokásos elektromagnetikus egységeket használjuk és c-nek hivjuk a fény terjedési sebességét, akkor

$$h = 4\pi c^2.$$

Minthogy a törésmutató gázok esetében igen közel áll az egységhez, azért szabad a

$$\nu = 1 + \tfrac{1}{2} hseN$$

kifejezést használnunk.

Hogy s-et meghatározhassuk, tekintsünk egy adott rezgésszámú egyenesen polarizált fénysugárnyalábot. Ennek minden pontjában periodikusan változó E elektromos erő hat, mely állandóan ugyanazon egyenes mentén irányul, s a melynek nagysága

$$E = a \cos nt$$

által fejezhető ki, hol n a rezgések frequentiáját jelenti. Ennélfogva az elektronra ható erő nagysága

$$ae \cos nt$$

s azt az r elmozdulást, melyet az elektron ezen erő hatása következtében a jelzett egyenes mentén szenved, a következő differentiálegyenletből számíthatjuk:

$$m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = ae \cos nt - kr.$$

Ennek utolsó tagja az egyensúlyi helyzet felé irányuló erőtől származik.

Az egyenlet azt mutatja, hogy az elektron a rá ható E elektromos erő befolyása alatt oly rezgő mozgást végezhet, a melynek n a szaporasága. Az egyenletet ugyanis

$$r = \frac{ae}{k - mn^2} \cos nt$$

elégíti ki, vagy ha

$$\frac{k}{m} = n_0^2,$$

akkor

$$r = \frac{ae}{m\,(n_0^2 - n^2)} \cos nt.$$

Ennélfogva az elektronnak r kitérése tényleg arányos az E elektromos erővel, s az arányossági tényező

$$s = \frac{e}{m\,(n_0^2 - n^2)}$$

minek folytán a törésmutató

$$\nu = 1 + \frac{hNe^2}{2m\,(n_0^2 - n^2)}.$$

Az n_0 állandó a *saját rezgések*, vagyis azon rezgések szaporasága, melyeket az elektron egyedül a kr erő hatása következtében végezhet. Föltételezzük, hogy ez a frequentia a spektrumnak egy messze az ultraibolyában fekvő helyének feleljen meg. Akkor a fénysugarakra nézve $n < n_0$ és $\nu > 1$, és pedig ν az n-nek növekedtével szintén növekszik, s ezzel a színszóródásnak tényleg létező tüneményét megmagyaráztuk.

ν-nek különböző n-ek esetében való megmérése alapján, minthogy h szintén ismeretes, az n_0 és $\frac{Ne^2}{m}$ állandókat lehet megállapítani. Ha aztán $\frac{e}{m}$-nek értékét, például azt, a mely a Zeeman-effektus megfigyeléséből származik, felhasználjuk, akkor Ne-nek értékét kaphatjuk. Másrészt megadhatjuk azt az $N\mathrm{e}$ elektromos tömeget, mely képes lenne a gáz térfogategységében foglalt minden molekulát az egyértékű elektrolytikus ion töltésével ellátni. Így végül kiszámítható az $\frac{e}{\mathrm{e}}$ arány értéke. A viszonyok természetesen bonyolultabbakká válnak, ha az önrezgések többféle faja lehetséges.

Alig kell külön hangsúlyoznom azt, hogy ha már egyszer megállapodtunk meghatározott és egymás közt egyenlő elektromos elemi quantumok létezését illetőleg, akkor a pozitiv elektronok vagy ionok töltését ezen természetes egységekben csakis oly számok fejezhetik ki mint például 1, 2, stb.

*

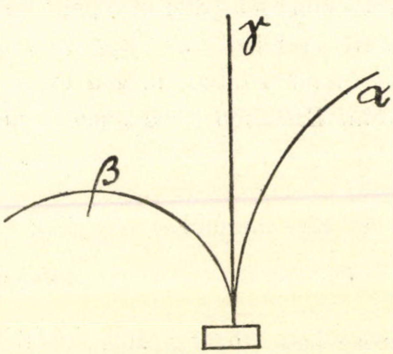
Az említettek alapján módunkban áll az elektronok és ionok tömegeit illetőleg fontos következtetéseket levonni. Egyszerűség okáért azokat az eseteket, a melyekben a töltés két vagy több elemi quantumból áll, mellőzni fogjuk, s így e-t az összes elektronokra és ionokra vonatkozólag egyenlőnek vehetjük. Így aztán az m tömegek az $\frac{e}{m}$ értékeivel fordítva arányosak lesznek.

Ennélfogva a negativ elektron tömege a hydrogenatom tömegének csak kicsiny törtrésze, ha az $\frac{e}{m}$ számára Simontól megállapított értéket veszszük alapul, akkor annak csak 2000-edrésze; ellenben a csatornasugarakban és a radium α-sugaraiban található pozitiv elektronok tömegei nagyságuk rendje szerint a chemiai atomok tömegeivel egyenlőek.

*

Úgy látszik, hogy az elektronok az atomnak két, töltéssel biró részre való szétszakadása folytán keletkeznek, melyek közül a pozitiv az atomnak majdnem egész tömegét nyeri osztályrészül, míg abból a negativ számára csupán egy kis törtrész marad fenn.

Az I. táblázat utolsó rovatában a szabad elektronok mozgási sebességére vonatkozó adatok is találhatók, mi mellett egységül a fény terjedési sebessége szolgált. Míg a pozitiv elektronok e mögött messzire elmaradnak, a negativoknál igen magas értékek szerepelnek. E tekintetben különösen nevezetes a radium sugárzása. Egyazon radiumsó egyidejűleg igen nagy sebességű negativ részecskéket és mérsékelt sebességű pozitiv részecskéket bocsát ki. A mágneses mező ezen sugarakat oly módon választja el egymástól, mint azt vázlatosan a 4. rajz mutatja, melyben a mágneses erővonalak irányát a rajz síkjára merőlegesnek veszszük. A mező az α és β sugarakat ellenkező irányokban téríti ki, míg a sugarak harmadik fajtája, a γ sugarak útjokat kitérítés nélkül folytatják.



4. ábra.

*

Azon szép vizsgálatokról, a melyeket Kaufmann a radiumsugaraknak elektromos és mágneses eltérítéseit illetőleg végzett, eddig azért nem tettem említést, mert előbb meg akarnám önöket azzal a problémával ismertetni, a mely ezen vizsgálatok nyomán megoldását nyerte.

Már megelőzőleg láttuk, hogy az elektromagnetikus mezőben az elektron általában erőhatást szenved. Magának az elektronnak is van mezeje, s így azt kell kérdeznünk, fog-e ez is erőt kifejteni? A számítások azt mutatják, hogy ez minden oly esetben bekövetkezik, valahányszor az elektron mozgása nem egyenes vonalú és egyenletes. Jelöljük q_1-gyel a mozgás irányába eső és q_2-vel az erre merőleges irányba eső gyorsulásokat; azt találjuk, hogy az éther az elektronra két erővel hat, melyek ezen gyorsulásokkal ellenkező irányúak és velük arányosak. Így tehát az egyik erőt $m_1 q_1$-gyel, a másikat $m_2 q_2$-vel jelölhetjük. Az m_1, m_2 együtthatók az elektron nagyságától, töltésétől s ezeken kívül még sebességétől is függenek.

Ha azt akarom, hogy az elektron bizonyos meghatározott mozgásba jőjjön, akkor, ha m_0 a szó közönséges értelmében vett tömeget jelenti, épen úgy mint egy közönséges anyagi pont esetében, az $m_0 q_1$ és $m_0 q_2$ erőket kell rá alkalmaznom; ezenfelül azonban még a most említett erőket is le kell győznöm. Egészben véve tehát a mozgás iránya mentén egy

$$(m_0+m_1) \cdot q_1$$

s az erre merőleges irányban egy

$$(m_0+m_2) \cdot q_2$$

erőre lesz szükség. Más szóval az elektron a tangencziális gyorsulást illetőleg úgy viselkedik, mintha tömege m_0+m_1 volna, a normális gyorsulást illetőleg úgy, mintha tömege m_0+m_2 volna.

Az m_0-t *valódi* tömegnek; m_1-et, illetőleg m_2-t *látszólagos* vagy *elektromagnetikus* tömegnek; az m_0+m_1 vagy m_0+m_2 tömegeket pedig *effektiv* tömegeknek fogjuk hívni; e mellett még m_1-et *longitudinális* és m_2-t *transzverzális* elektromagnetikus tömegekként is jelölhetjük.

Különben azt, hogy lehet szó elektromagnetikus tömegről, egy a mozgás irányában fellépő gyorsulás esetében, könnyen más módon is beláthatjuk. Ha t. i. egy elektronnak meghatározott sebességet akarok adni, akkor az ezen sebességnek megfelelő mezőt kell létrehozni; minthogy pedig a mező energiát tartalmaz, tehát ehhez munkavégzés szükséges s így egyre megy, ha ennek megfelelőleg a tömeget valamivel megnagyobbitom.

Igen fontos most már az a kérdés, hogy az effektiv tömeg, melynek a töltéshez való arányát észleletek alapján kiszámithatjuk, mennyiben valódi tömeg, s mennyiben áll elektromagnetikus tömegből? Az e fölötti döntés lehetősége abban áll, hogy az m_1, m_2 elektromagnetikus tömegek nem állandóak, hanem az elektron sebességétől függők. Ha ez csekély, akkor egy olyan gömbalakú elektron esetében, melynek küllője R, e-nyi töltése pedig felületén egyenletesen van eloszolva, mind m_1-nek, mind pedig m_2-nek értéke

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{R}.$$

Nagyobb sebességekre vonatkozólag értékeik oly rohamosan emelkednek, hogy az esetben, a mikor a sebesség a fény terjedési sebességét közelíti meg, végtelenekké válnak.

M. ABRAHAM, a ki az elektron dynamikájának kifejtése körül nagy érdemeket szerzett, az m_1 és m_2 számára képleteket vezetett le.

5. *Jegyzet.* Ha az elektron sebességének a szabad étherben terjedő fény sebességéhez való arányát β-vel jelöljük, akkor ezen képletek a következők:

$$m_1 = \frac{e^2}{2R\beta^3}\left[\frac{2\beta}{1-\beta^2} - \operatorname{lognat}\frac{1+\beta}{1-\beta}\right]$$

$$m_2 = \frac{e^2}{4R\beta^3}\left[-2\beta + (1+\beta^2)\operatorname{lognat}\frac{1+\beta}{1-\beta}\right]$$

vagy, ha β-nek növekedő hatványai szerint kifejtünk:

$$m_1 = \frac{e^2}{R}\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{5}\beta^2+\tfrac{6}{7}\beta^4+\cdots\right)$$

$$m_2 = \frac{e^2}{2R}\left[(1+\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5})\beta^2+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7})\beta^4+\cdots\right]$$

KAUFMANN vizsgálatainak eredménye azt mutatta, hogy az észlelési hibák határain belül az m_0+m_2 effektiv tömeg a sebességgel együtt ugyanoly mértékben változik, mint a hogyan ezen képletek szerint az m_2 elektromagnetikus tömegnek változnia kell. Ennélfogva szabad föltételeznünk, hogy a negativ elektronoknak nincsen valódi tömegük, hanem csupán elektromagnetikus tömeggel rendelkeznek, hogy tehát úgyszólván anyagnélküli töltések, vagy a mi egyre megy, hogy a mozgásban levő negativ elektronra nézve más energia, mint a mezőnek elektromagnetikus energiája, számításba nem jöhet.

6. Jegyzet. A gyorsulásokkal arányos erők nem az egyedüliek azon hatások közt, melyeket az éther a mozgásban levő elektronra kifejt. Még egy más erő is föllép, melynek összetevői nem túlságos sebességek esetében az elmélet szerint a következők :

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\frac{d^3x}{dt^3},\quad \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\cdot\frac{d^3y}{dt^3},\quad \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\frac{d^3z}{dt^3}.$$

Ezen kifejezések a töltés minden eloszlása esetében érvényesek ; bennük x, y, z a középpont koordinatái, míg c a fény terjedési sebességét jelenti.

Ha ezen eredményt oly elektronra alkalmazzuk, mely az x tengely mentén az

$$x = a\cos nt$$

egyenletnek megfelelő egyszerű rezgéseket végez, akkor ezen új erő az x tengely irányában hat, s értéke

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\cdot\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2e^2}{c}\frac{dx}{dt}.$$

Az erő tehát a mozgással ellentett irányú, s így *ellenállás*ként tekinthető, melynek következtében a rezgések, ha azokat egy más erő nem támogatja, csillapulni fognak. Ez a körülmény azzal áll kapcsolatban, hogy a részecske, mint egy sugárzásnak kiindulási pontja, energiaveszteséget szenved.

Hogy a rezgések fentartassanak, arra egy, az ellenállással ellentétes

$$\frac{2}{3}\frac{n^2e^2}{c}\cdot\frac{dx}{dt}$$

erő szükséges. Ez a dt időelem alatt

$$\frac{2}{3}\frac{n^2e^2}{c}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \frac{2}{3}\frac{n^4e^2a^2}{c}\sin^2 nt\,dt$$

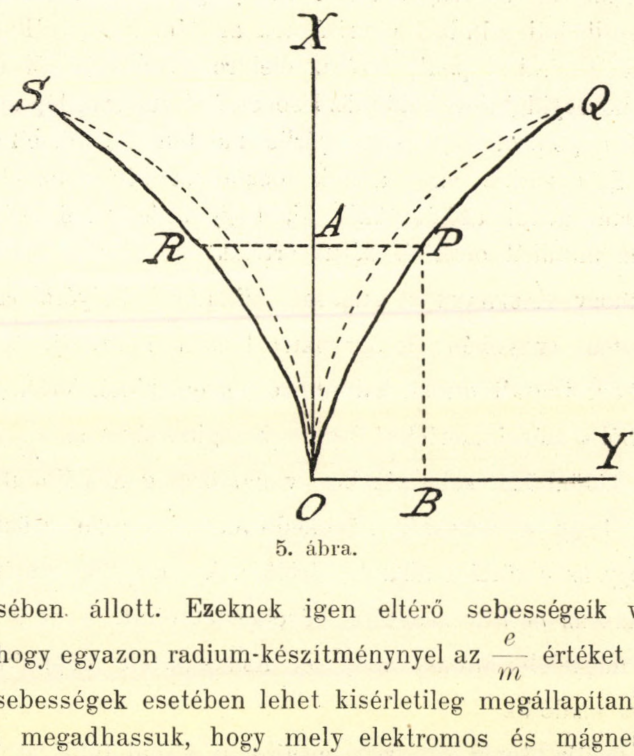
munkát végez, honnét integráczióval a $\frac{2\pi}{n}$ teljes periodus alatt végzett munka

$$\frac{2\pi n^3 e^2 a^2}{3c}$$

értékkel adódik ki. Ez pedig megegyezik azzal az értékkel, melyet az egy rezgés folyamán kisugárzott energiára találtak.

*

Kaufmann módszeréről még egyet-mást el kell mondanom. A módszer a β-sugarak elektromos és mágneses kitérítéseinek



5. ábra.

mérésében állott. Ezeknek igen eltérő sebességeik vannak, úgy, hogy egyazon radium-készitménynyel az $\frac{e}{m}$ értéket különféle sebességek esetében lehet kisérletileg megállapitani. Hogy aztán megadhassuk, hogy mely elektromos és mágneses elterítések összetartozóak, más szóval, melyek vonatkoznak az elektronok egyazon csoportjához, Kaufmann a kétféle elterítést egyidejűleg létesitette. Gondolják, hogy a köztünk fekvő térben egyidejűleg egy elektromos és egy mágneses mező áll fenn; mindkettőnek erővonalai vízszintesek, s a hallgatóságra nézve jobbról-balra haladók. Ha már most egy az én közelemben fekvő pontból β-sugarak indulnak egy velem szemköztes pont felé, akkor azokat az elektromos erő vízszintesen, még pedig negativ töltésekről lévén szó, az önök jobbja felé, a mágneses erő pedig fölfelé fogja kitériteni. Ha a sugarak egy az eredeti irányukra merőleges ernyőre esnek, s ha az 5. rajznak megfelelőleg ezen az ernyőn koordinátatengelyeket veszünk föl, az egyiket vízszintesen, a másikat függőlegesen, s kezdőpontul azt az O pontot veszszük, melyben az eltéritetlen sugarak metszik az ernyőt, akkor a ténylegesen kijelölt P pontnak koordinátái mindkét eltérítésnek mértékeül szolgálhatnak. Mind OA, mind pedig OB az elektron sebességétől függenek, s ha egyidejűleg különböző sebességű sugarak lépnek föl, akkor a P pontok egy OPQ görbe mentén fognak elhelyezkedni. Ez a görbe, vagy annak meghosszabbitása az O pont felé halad, a mi abból tűnik ki, hogy a fény sebességének esetében mindkét eltérítés zérus értékű.

Minthogy KAUFMANN a sugarak kiindulási helyétől csekély távolságban ernyőként fotografikus lemezt használt, tehát a görbe koordinátáit annak különböző helyein kimérhette, s ezen adatokból a már ismertetett képletek segítségével az $\frac{e}{m}$ arány értékét különböző sebességekre vonatkozólag megállapithatta. Kitünt, hogy a sebesség növekedtével $\frac{e}{m}$ értéke csökkenik. Minthogy az e töltést állandó értékűnek tekintjük, ennélfogva KAUFMANN az m növekedésére következtethetett, s ez a növekedés megfelelt annak, mely az ABRAHAM-féle képletből m_2 számára kiadódik.

Az effektiv tömeg ezen változásairól az alábbi táblázat nyujtson fogalmat, melynek első rovatában a sebességet találjuk, a fénysebesség egységében kifejezve.

II. Táblázat.

Sebesség	$\frac{e}{m}$
0·79	1·21 $\times 10^7$
0·83	1·13 $\times 10^7$
0.86	1·07 $\times 10^7$
0·91	0·93 $\times 10^7$
0·94	0·83 $\times 10^7$

Az I. táblázatban a β-sugarakra vonatkozólag megadott értéke $\frac{e}{m}$-nek az a határérték, melyhez ez az arány a sebességnek folytonos csökkenése közben közeledik.

Ezekhez még hozzá kell fűznöm először is azt, hogy a valóságban a kisérleti berendezés nem volt olyan egyszerű, mint a milyennek a megelőzőkben azt leírtam és másodszor azt, hogy KAUFMANN az elektromos kitérítések egyszerű értékei helyett azok kétszereseit mérte. E czélból bizonyos idő mulva az elektromos mezőt megfordította, s ily módon a görbének egy második ORS ágát nyerte, úgy hogy az OA koordinátának különböző értékei mellett tulajdonképen PR-et mérhette.

*

Bár igen messzire vezetne, ha KAUFMANN számításait követni akarnók, de mégis kissé közelebbről akarunk foglalkozni a görbék alakjával.

A tényleges kisérleti berendezésre vonatkozólag is első megközelitésűl föltehetjük, hogy az $OA=x$ és $OB=y$ koordináták arányosak azokkal a görbületekkel, a melyekkel a kiindulás helyéről P felé röpülő elektronok pályái a mágneses, illetőleg az elektromos mezők következtében rendelkeznek. Innét az (1) és (3) alatti egyenletek alapján az következik, hogy ha az e, m, v, E, H betűk jelentéseit föntartjuk és a, b-vel állandókat jelölünk, akkor

$$x = \frac{aeH}{mv}, \quad y = \frac{beE}{mv^2}.$$

Ha ezekben v helyére különböző értékeket helyettesítünk, akkor a görbe különböző pontjainak koordinátáit kapjuk. A görbe alakja attól függ, hogy v-vel kapcsolatosan az m mi módon változik? Ha m állandó maradna, akkor y az x-nek második hatványával volna arányos, a görbék parabolák lennének, mint azt az 5. rajzban a pontozott vonalak tüntetik föl. KAUFMANN eredményei szerint a görbék a paraboláktól a rajzban feltüntetett irány szerint eltérnek. Minthogy föntebbi egyenleteink alapján

$$y = \frac{bE}{a^2eH^2} \cdot mx^2,$$

ennélfogva ha kisebb v-nek, tehát nagyobb x-nek kisebb m felel meg, akkor y kevésbbé gyorsan növekszik mint x^2.

Megjegyzendő még, hogy a tényleg megállapított idom méretei nem érik el a czentimétert, s hogy a fotografikus lemez csak néhány czentiméternyire volt a sugarak forrásától, egy milligrammnyi radiumbromidtól felállítva. Joggal mondhatjuk tehát, hogy itt csekély, a dimenziókat illetőleg csekély eszközökkel nagy dolgok végeztettek.

*

KAUFMANN eredménye igen alkalmas arra, hogy újabb vizsgálatokra serkentsen. E tekintetben azt akarom fölemlíteni, hogy mozgatott rendszerekre vonatkozólag tett különféle tapasztalatok alapján arra a sejtelemre jutottam, hogy egy a nyugalom esetében gömbalakú elektron, a mint mozgásnak indul, a mozgás iránya mentén összelapul s ellipszoiddá válik, mely annál inkább közeledik a lapos korong alakjához, mennél kevésbbé tér el a mozgás sebessége a fény sebességétől. A deformálható elektronnak ezen fölvétele, melyet csak fentartással említek föl, mert további vizsgálata nagy nehézségekbe ütközik, az elektromagnetikus tömegre vonatkozólag oly kifejezésekre vezet, melyek az ABRAHAMéitól lényegesen eltérnek.

Mindamellett képleteim eléggé jól megegyeznek a KAUFMANN-féle mérésekkel, csak a sebességeknek nem szabad oly magas értékeket tulajdonítani, mint a milyeneket az Abraham-féle egyenletek megkövetelnek. A két felfogás közötti kisérleti alapon való döntés akkor következnék be, ha a Kaufmann-féle kisérleteknél az elektromos és mágneses mező intenzitásokat elegendő pontossággal lehetne megállapitani.

Most már (1905 deczemberében) hozzátehetem, hogy Kaufmann kisérleteinek megismétlésével ezt a döntést már elintézte. Az új eredmények azt a nézetet támogatják, hogy az elektronok változatlan alakú és méretű gömböcskék.

7. *Jegyzet.* Minthogy az elektromosságnak mai elmélete az éthert mozdulatlannak tekinti, ennélfogva fel kell tételeznünk, hogy az éther nem vesz részt a Föld mozgásaiban, s így összes kisérleteinknél készülékeinkre vonatkozólag az éthernek csupán relativ mozgásáról szólhatunk. Ha a Föld forgásának csekély sebességét nem veszszük figyelembe, akkor azt mondhatjuk, hogy ezen relativ mozgásnak n sebessége ellentétesen egyenlő a Föld tranzlacziós sebességével, mely a Földnek a Nap körül végbemenő évenkinti mozgásából származik. Értéke kerekszámban 30.000 méter másodperczenkint, vagyis a fény c sebességének 10.000-edrésze.

Kérdés tehát, vajjon az éthernek készülékeinkre vonatkozó ezen relativ mozgása van-e észrevehető befolyással? Ennek eldöntése czéljából Fresnel óta számos vizsgálódások végeztettek; de mindazon kisérletek, melyeknél a Földhöz viszonyítva nyugalomban levő testek szerepeltek, negativ eredményre vezettek. Nemcsak azok a kisérletek, melyeknél az elektromos vagy optikai tüneményekre való olyan befolyás mutatkozhatott volna, a melynek nagysága $\frac{n}{c}$-rendű, hanem azok is, a melyeknél még az $\frac{n^2}{c^2}$ rendjének megfelelő mennyiségek is észrevehetőkké válhattak volna, oly eredményre vezettek, mintha az éther a Földhöz viszonyítva nyugalomban volna, más szóval, a Földdel együtt mozogna.

Addig, a míg $\frac{n}{c}$-rendű mennyiségekre szorítkozunk, erről minden nehézség nélkül számot adhatunk; akadályok csak akkor mutatkoznak, ha magasabbrendű mennyiségeket is tekintetbe akarunk venni. A mi közben már most azon fáradoztam, hogy az elméletet oly alakba öntsem, melynél a sebesség minden értékére nézve az elektromos és optikai tüneményeknek a tranzlacziótól való teljes függetlensége adódjék ki, szükségképen a deformálható elektron hypothezisére vezettettem. Mint azt Cohn kimutatta, azon egyenletek, melyek ezen föltevés mellett az elektromagnetikus mező számára leszármaztak, teljesen megegyeznek azokkal, melyekhez ő teljesen eltérő utakon eljutott. Mindenesetre kettőnk elméletei az egyenletek értelmezése dolgában egymástól erősen eltérnek.

Az eredetileg gömbalakú elektronnak a v sebességgel való mozgása közben föltételezett alakváltozása abban áll, hogy míg a tranzlaczióra merőleges irányú méret változatlan marad, addig a tranzlaczió irányával párhuzamos méret 1-nek a $\sqrt{1-\beta^2}$-hoz való arányában kisebbedik, hol β-nek értéke úgy mint az 5. jegyzetben $\frac{v}{c}$-vel egyenlő. A longitudinális és transverzális elektromagnetikus tömegek számára az

$$m_1 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{R}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$m_2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{R}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

értékeket találtam. E mellett föltételeztetett, hogy a nyugalmi állapotban az e töltés a gömbalakú elektron felületén egyenletes szétoszlású. R a nyugalomban levő részecske küllőjét jelenti.

Megjegyzendő még, hogy ezen elméletnél föltételezendő az, hogy az elektron sebessége a fény sebességét sohasem mulhatja felül.

Ha m_1-nek föntebbi értéke alapján kiszámítjuk azt a munkát, a melylyel az elektronnal v sebességet közölhetünk, s ezt a munkát azzal az elektromagnetikus energiával összehasonlítjuk, a mely ennek a sebességnek megfelel, akkor azt találjuk, hogy a deformált elektron

$$\frac{1}{6}\frac{c^2e^2}{R}\left\{1-(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

mennyiségnyivel kevesebbet tartalmaz valamelyes belső energiából, mint az eredeti nyugalmi állapot esetében. Ez az utóbbi megjegyzés Abraham-tól származik, s világosan mutatja, mennyire rászorul a deformálható elektron föltételezése a további megvizsgálásra és okadatolásra.

A mint azt a szövegben már fölemlítettük, Kaufmannnal újabb keletű (1905-től eredő) vizsgálatai a deformálható elektron elmélete ellen döntöttek, s így az a kisérletem, mely az elektron-elmélet alapján a tüneményeknek a tranzláczió sebességétől való teljes függetlenségét törekedett bebizonyítani, eredménytelennek tekinthető.

*

Kaufmann észleletei alapján kétségtelen, hogy a β-sugarak esetében a tényleges tömeg létezését tagadásba vehetjük. Minthogy kicsiny sebességek esetében az elektromagnetikus tömeg értéke

$$m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{R}$$

ennélfogva, ha e-nek és m-nek absolut értékeit ismerjük, akkor az elektronnak R küllőjét is meghatározhatjuk. Erre később még visszatérünk.

Azon eredmény, melyre Kaufmann a negativ elektron tömegét illetőleg jutott, annak a több oldalról fölvetett kérdésnek további megfontolására bátorít, vajjon egyáltalán létezik-e valódi tömeg? Elképzelhetjük azt, hogy minden ponderabilis anyag elektronokból van összetéve, s a mozgatott testek minden kinetikai energiája nem egyéb, mint elektromagnetikus mezőknek az energiája. Ha ez a sejtelem beigazolódnék, akkor végtére is nem az elektromagnetikus tüneményeket kellene mechanikailag, hanem a mechanikai tüneményeket kellene elektromagnetikailag magyarázni; az urakra nézve ennek az az örvendetes következménye lenne, hogy a technika minden ága alapjában elektrotechnikává alakulna.

De ilyen messzire még semmiesetre sem jutottunk. Egyelőre meg kell elégednünk azzal, hogy igen nagy valószínűséggel azt állíthatjuk, hogy a szabad, negativ elektronok egyszerű esetében valóságos tömeg nem létezik. Különben, ha nem is sikerülne az anyagot teljesen elektronokra bontani, mégis minden kétségen felül áll az, hogy az atomok elektromos töltései valami igen lényeges dolgok, s hogy reményünk lehet az atomokból kiinduló elektromos rezgések segítségével az atomok szerkezetét illetőleg becses felvilágosításokat nyerhetni. Ily módon válik a spektrálvonalak és a Zeeman-effektus bonyolultabb eseteinek elmélete, valamint ezen tüneményeknek a chemiaiakkal való összefüggése az elektron-elméletnek fontos problemájává.

Ford. Bozóky Endre.

MEGOLDOTT FELADATOK.

Meghatározandók az $y = x! \sin \frac{\pi}{(x+1)!}$ *diophantikus egyenlet egészszámú megoldásai.* (KÜRSCHÁK.)

Első megoldás Spiegel Károly egyetemi hallgató részéről.

Ismeretes, hogy ha n páros szám, akkor

$$\sin na = \binom{n}{1} \cos^{n-1} a \sin a - \binom{n}{3} \cos^{n-3} a \sin^3 a +$$

$$+ \binom{n}{5} \cos^{n-5} a \sin^5 a - \binom{n}{7} \cos^{n-7} a \sin^7 a + \cdots +$$

$$+ (-1)^r \binom{n}{2r+1} \cos^{n-2r-1} a \sin^{2r+1} a + \cdots +$$

$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{n-1} \cos a \sin^{n-1} a.$$

Esetünkben $n = (x+1)!$; $a = \frac{\pi}{(x+1)!}$.

Páratlan egészszámú n-nel csak akkor van dolgunk, ha $x = 0$; de akkor

$$\sin \frac{\pi}{(x+1)!} = 0; \; y = 0.$$

Vizsgáljuk meg már most, ha n páros egész szám, hogy mikor lesz $\sin \frac{\pi}{(x+1)!}$-nak raczionális értéke? Mivel $\sin na = 0$, azért

$$0 = \binom{n}{1} \cos^{n-2} a - \binom{n}{3} \cos^{n-4} a \sin^2 a + \binom{n}{5} \cos^{n-6} a \sin^4 a -$$

$$- \binom{n}{7} \cos^{n-8} a \sin^6 a + \cdots + (-1)^r \binom{n}{2r-1} \cos^{n-2r} a \sin^{2r-2} a +$$

$$+ \cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{n-1} \sin^{n-2} a.$$

Itt $\cos\alpha$-t $\sin\alpha$-ban kifejezve, oly egészszámú együtthatókkal biró egyenletet kapunk, mely $\sin\alpha$-nak csak páros hatványait tartalmazza. A legmagasabb hatvány együtthatója lesz:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-1}=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+$$
$$+\binom{n-1}{3}+\cdots+\binom{2r+1}{n-1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}=2^{n-1}.$$

Az $(n-2r)$-dik hatvány együtthatója osztható 2-nek $(n-2r+1)$-dik hatványával. Az utolsó együttható értéke pedig n.

Ennélfogva $2\sin\alpha$ oly algebrai egyenletnek tesz eleget, melyben az együtthatók egész számok és a legmagasabb hatvány együtthatója az egység; vagyis $2\sin\alpha$ csak akkor lehet raczionális szám, ha egyszersmind egész szám. E szerint n páros értékeinél csakis 1 és $\frac{1}{2}$ lehetnek $\sin\alpha$ raczionális értékei.

*

Második megoldás Ujj Gyula tanárjelölt részéről.

Itt $x!$ az

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\cdots$$

sorban z^x együtthatójának reczziprok értékét jelenti, tehát csak $x\geqq 0$ esetében bir értelemmel. Ebben az esetben egyszersmind $y\geqq 0$; tehát az egyenletnek csak nem-negativ gyökrendszerei vannak.

E gyökrendszerek megkeresése végett írjuk egyenletünket így:

$$y=\frac{\pi}{x+1}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{(x+1)!}}{\dfrac{\pi}{(x+1)!}}.$$

A második tényezőre nézve a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$0\leqq\frac{\sin\dfrac{\pi}{(x+1)!}}{\dfrac{\pi}{(x+1)!}}<1.$$

Ennek következtében

$$0\leqq y<\frac{\pi}{x+1}.$$

De ebben az esetben y csak az

$$x + 1 \leqq 3$$

feltétel mellett lehet egész szám. Tekintetbe jönnek tehát az $x=0, 1, 2$ értékek. Ezek helyettesítésével kapjuk a következő három gyökrendszert:

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (2, 1).$$

*

34. *Bebizonyítandó, hogy*

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_3 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 & d_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 & d_3 & d_1 & d_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 & d_2 & d_3 & d_1 \end{vmatrix}$$

az

$$R_i = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_i a_2 + \alpha_i^2 a_3 & b_1 + \alpha_i b_2 + \alpha_i^2 b_3 \\ c_1 + \alpha_i c_2 + \alpha_i^2 c_3 & d_1 + \alpha_i d_2 + \alpha_i^2 d_3 \end{vmatrix}$$

$$(i=0, 1, 2)$$

determinánsok szorzatával egyenlő, hol $\alpha_0=1$ *és* α_1, α_2 *az egység komplex harmadik gyökei.*

Továbbá

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_3 & b_1 & b_2 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_3 & b_1 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ c_1 & c_3 & c_3 & d_1 & d_2 & d_3 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ c_3 & c_2 & c_2 & d_3 & d_1 & d_2 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ c_2 & c_1 & c_1 & d_2 & d_3 & d_1 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & v_{13} & v_{12} & v_{13} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & v_{23} & v_{22} & v_{23} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{k1} & u_{k2} & u_{k3} & v_{k1} & v_{k2} & v_{k3} & w_{k1} & w_{k2} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$

az R_1, R_2 *és*

$$S_k = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ c_1 + c_2 + c_3 & d_1 + d_2 + d_3 & y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ u_{11} + u_{12} + u_{13} & v_{11} + v_{12} + v_{13} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} \\ u_{11} + u_{22} + u_{23} & v_{21} + v_{22} + v_{23} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{k1} + u_{k2} + u_{k3} & v_{k1} + v_{k2} + v_{k3} & w_{k1} & w_{k2} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$

szorzatával egyenlő. (KÜRSCHÁK.)

Megoldás Oberle Károly VI. ker. áll. főreáliskola tanártól.

I. Mindenekelőtt kiemeljük, hogy R_i $(i=0, 1, 2)$ az

$$a,\ b,\ c,\ d$$

változóknak, S_k pedig az

$$a,\ b,\ c,\ d,\ u,\ v,\ w,\ x,\ y$$

változóknak irreduktibilis homogen egész függvénye.

Ellenkező esetben ugyanis e függvények közül a reduktibilisek még akkor is reduktibilisek maradnának, ha

$$\begin{matrix} a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ u_{12},\ldots,v_{12},\ldots,w_{12},\ldots,x_2,\ y_2 \\ a_3,\ b_3,\ c_3,\ d_3,\ u_{13},\ldots,v_{13},\ldots,w_{13},\ldots,x_3,\ y_3 \end{matrix}$$

helyébe zérust helyettesítünk.

Ámde ez lehetetlen, mert e helyettesítés után R_i $(i=0, 1, 2)$ és S_k oly determinánsokba mennek át, melyeknek elemei egymástól független változók, az ily determinánsokról pedig ismeretes, hogy elemeiknek irreduktibilis egész függvényei.

II. D_0 oly szorzat alakjában állítható elő, melynek egyik tényezője R_i.

Legyen

$$\varphi_i(x) = x_1 + \alpha_i x_2 + \alpha_i^2 x_3$$

és így

$$\alpha_i \varphi_i(x) = x_3 + \alpha_i x_1 + \alpha_i^2 x_2,$$

$$\alpha_i \varphi_i^2(x) = x_2 + \alpha_i x_3 + \alpha_i^2 x_1.$$

$$(i=0, 1, 2)$$

Ha D_0-ban az első ill. negyedik oszlophoz hozzáadjuk a másodiknak ill. ötödiknek α_i-vel való szorzatát és a harmadiknak ill. hatodiknak α_i^2-tel való szorzatát, akkor D_0 a következő determinánsba megy át:

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(a) & a_2 & a_3 & \varphi_i(b) & b_2 & b_3 \\ \alpha_i \varphi_i(a) & a_1 & a_2 & \alpha_i \varphi_i(b) & b_1 & b_2 \\ \alpha_i^2 \varphi_i(a) & a_3 & a_1 & \alpha_i^2 \varphi_i(b) & b_3 & b_1 \\ \varphi_i(c) & c_2 & c_2 & \varphi_i(d) & d_2 & d_3 \\ \alpha_i \varphi_i(c) & c_1 & c_2 & \alpha_i \varphi_i(d) & d_1 & d_2 \\ \alpha_i^2 \varphi_i(c) & c_3 & c_1 & \alpha_i^2 \varphi_i(d) & d_3 & d_1 \end{vmatrix}.$$

Itt az első ill. negyedik sor α_i-szeresét kivonva a második ill. ötödik sorból, az elsőnek ill. negyediknek α_i^2-szeresét pedig a harmadik ill. hatodik sorból, leszen:

$$D_0=\begin{vmatrix} \varphi_i(a) & a_2 & a_3 & \varphi_i(b) & b_2 & b_3 \\ 0 & . & . & 0 & . & . \\ 0 & . & . & 0 & . & . \\ \varphi_i(c) & c_2 & c_3 & \varphi_i(d) & d_2 & d_3 \\ 0 & . & . & 0 & . & . \\ 0 & . & . & 0 & . & . \end{vmatrix}$$

Az első és negyedik oszlop elemeiből alkotható másodfokú aldeterminánsok szerint kifejtve, csak egy zérustól különböző tag lép fel:

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(a) & \varphi_i(b) \\ \varphi_i(c) & \varphi_i(d) \end{vmatrix} \Phi,$$

a hol Φ a baloldali tényező adjungáltja.

A φ-kből alkotott másodfokú determináns azonos R_i-vel, tehát D_0 valóban osztható R_i-vel. Az R_i-k irreduktibilisek lévén egy konstans tényezőtől ε-tól eltekintve D_0 az R_i-k szorzatával egyenlő. Könnyű igazolni, hogy $\varepsilon=1$.

A D_0 kifejtésénél fellépő tagokat hasonlítsuk össze az R_i-k összeszorzásánál fellépő tagokkal. Elég ezt az egyikre megtenni. D_0-ban az a_1 legmagasabb hatványát tartalmazó tag, a főtag: $a_1^3d_1^3$. Az R_i-k összeszorzásánál a főtagok szorzata szintén $a_1^3d_1^3$ s így valóban

$$D_0 = R_0R_1R_2.$$

III. D_k osztható S_k-val. Ha ugyanis D_k-ban az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat és harmadikat, a negyedik oszlophoz pedig az ötödiket és hatodikat, akkor D_k a következő determinánsba megy át:

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(a) & a_2 & a_3 & \varphi_0(b) & b_2 & b_3 & x_1 & \dots & x_k \\ \varphi_0(a) & a_1 & a_2 & \varphi_0(b) & b_1 & b_3 & x_1 & \dots & x_k \\ \varphi_0(a) & a_3 & a_1 & \varphi_0(b) & b_3 & b_1 & x_1 & \dots & x_k \\ \varphi_0(c) & c_2 & c_3 & \varphi_0(d) & d_2 & d_3 & y_1 & \dots & y_k \\ \varphi_0(c) & c_1 & c_2 & \varphi_0(d) & d_1 & d_2 & y_1 & \dots & y_k \\ \varphi_0(c) & c_3 & c_1 & \varphi_0(d) & d_3 & d_1 & y_1 & \dots & y_k \\ \varphi_0(u_1) & u_{12} & u_{13} & \varphi_0(v_1) & v_{12} & v_{12} & w_{11} & \dots & w_{1k} \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ \varphi_0(u_k) & u_{k2} & u_{k3} & \varphi_0(v_k) & v_{k2} & v_{k3} & w_{k1} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$

Itt az első sor a második és a harmadik sorból, a negyediket pedig az ötödik és hatodikból vonván ki:

$$D_k = \begin{vmatrix} \varphi_0(a) & a_2 & a_3 & \varphi_0(b) & b_2 & b_3 & x_1 & \dots & x_k \\ 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_0(c) & c_2 & c_3 & \varphi_0(d) & d_2 & d_3 & y_1 & \dots & y_k \\ 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_0(u_1) & u_{12} & u_{13} & \varphi_0(v_1) & v_{12} & v_{13} & w_{11} & \dots & w_{1k} \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ \varphi_0(u_k) & u_{k2} & u_{k3} & \varphi_0(v_k) & v_{k2} & v_{k3} & w_{k1} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$

A második, harmadik, ötödik és hatodik sor elemeiből alkotható negyedfokú aldeterminánsok szerint kifejtve, csak egy zérustól különböző tagot kapunk, melyben mint tényező S_k lép fel. Tehát D_k valóban osztható S_k-val.

Ki kell még mutatni, hogy D_k az R_1, R_2-vel is osztható. E végből D_k-ban az első ill. negyedik sorhoz a másodiknak ill. ötödiknek a_i^2-tel való szorzatát és a harmadiknak ill. hatodiknak a_i-vel való szorzatát.

Tekintetbe véve, hogy

$$1 + a_i + a_i^2 = 0, \quad (i=1,\,2)$$

leszen :

$$D_k = \begin{vmatrix} \varphi_i(a) & a_i^2\varphi_i(a) & a_i\varphi_i(a) & \varphi_i(b) & a_i^2\varphi_i(b) & a_i\varphi_i(b) & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_1 & a_2 & b_3 & b_1 & b_2 & x_1 & \dots & x_k \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_2 & b_1 & x_1 & \dots & x_k \\ \varphi_i(c) & a_i^2\varphi_i(c) & a_i\varphi_i(c) & \varphi_i(d) & a_i^2\varphi_i(d) & a_i\varphi_i(d) & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_2 & d_3 & d_1 & d_2 & y_1 & \dots & y_k \\ c_2 & c_1 & c_1 & d_2 & d_3 & d_1 & y_1 & \dots & y_k \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & w_{11} & \dots & w_{1k} \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ u_{k1} & u_{k2} & u_{k3} & v_{k1} & v_{k2} & v_{k3} & w_{k1} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$

Ha az első ill. negyedik oszlop a_i^2-szeresét kivonjuk a második ill. ötödik sorból s a harmadik ill. hatodik sorból az első ill. negyedik sor a_i-szorosát,

$$D_k = \begin{vmatrix} \varphi_i(a) & 0 & 0 & \varphi_i(b) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & . & . & b_3 & . & . & x_1 & \dots & x_k \\ a_2 & . & . & b_2 & . & . & x_1 & \dots & x_k \\ \varphi_i(c) & 0 & 0 & \varphi_i(d) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & . & . & d_3 & . & . & y_1 & \dots & y_k \\ c_2 & . & . & d_2 & . & . & y_1 & \dots & y_k \\ u_{11} & . & . & v_{11} & . & . & w_{11} & \dots & w_{1k} \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ u_{k1} & . & . & v_{k1} & . & . & w_{k1} & \dots & w_{kk} \end{vmatrix}$$

kifejtvén az első és negyedik sorból képezhető másodfokú aldeterminánsok szerint, a szorzatot

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(a) & \varphi_i(b) \\ \varphi_i(c) & \varphi_i(d) \end{vmatrix} \Phi''\text{-}$$

vel találjuk egyenlőnek.

Az R_1, R_2, S_k irreduktibilis lévén az $R_1R_2S_k$ szorzat, legfeljebb egy állandó tényezőtől ε-tól eltekintve, a D_k-val egyenlő. A megfelelő tagokat az előbbihez hasonló módon hasonlítván össze, azt kapjuk, hogy $\varepsilon = 1$ s így

$$D_k = R_1R_2S_k.$$

*

35. *Bebizonyítandó, hogy a síknak bármely önmagára való kollineár leképezése mint két polárreciprocitás összetétele állítható elő. Továbbá kifejtendő, hogy egy kollineácziónak mikép nyerhetők összes előállításai.* (KÜRSCHÁK.)

Megoldás Szilárd Aladár egyetemi hallgatótól.

A síknak bármely önmagára való kollineár leképzését a kollineáczió egy kettős háromszöge s két egymásnak megfelelő pont A és A' meghatározzák. Az a két polárreciprocitás, melyeknek a felvett kettős háromszög közös polárháromszögük, továbbá melyekben a sík egy bizonyos egyenesének A, illetve A' felel meg, létrehozza az adott kollineácziót. Mivel pedig két polárreciprocitás összetétele mindig olyan kollineáczió, a melynek kettős háromszöge közös polárháromszöge a két polárreciprocitásnak, azért ilyen módon az összes előállítást jellemeztük.

*

39. *Bebizonyítandó, hogy egy harmadfokú determinánsban nem lehet mind a hat tag pozitiv értékű, még akkor sem, ha komplex elemeket engedünk meg.* (RADOS.)

Első megoldás Fekete Mihály tanárjelölttől Budapesten.

A tétel bebizonyításában indirekt utat követünk: felteszszük a tétel ellenkezőjét, t. i. azt, hogy az elemek kellő vállasztása esetében lehetséges az, hogy egy harmadfokú determinánsban mind a hat tag pozitiv értékű legyen és kimutatjuk, hogy e feltevés alapján abszurd eredményre jutunk.

Tegyük fel ugyanis, hogy a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & {}_{13} \\ a_{21} & a_{22} & {}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & {}_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

determinánsnak — melynek elemei valós vagy komplex számok — mind a hat tagja pozitiv, azaz egyidejűleg igaz a következő hat egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33} &> 0 \\ a_{12}a_{23}a_{31} &> 0 \\ a_{13}a_{21}a_{32} &> 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_{11}a_{23}a_{32} &< 0 \\ a_{12}a_{21}a_{33} &< 0 \\ a_{13}a_{22}a_{31} &< 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Szorozzuk össze egymással az (1), illetve (2) alatti egyenlőtlenségeket:

(1)-ből:

$$a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{31}a_{33} > 0.$$

(2)-ből:

$$a_{11}a_{12}a_{13}a_{01}a_{22}a_{23}a_{31}a_{22}a_{33} < 0.$$

E két utolsó egyenlőtlenség simultan nem állhat fenn; ime abszurdumra jutottunk, melyre a tétel tagadása vezetett. A tételt tehát igaznak kell vennünk.

*

Második megoldás Ujj Gyula tanárjelölt részéről.

A determinánst kifejtve, a következő kifejezést kapjuk:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{31}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Itt az első három tag szorzatához hozzáadva az utolsó három tag szorzatát, zérust kapunk; holott csupa pozitiv tagot tételezve fel, e két szorzat összegének is pozitivnak kellene lenni.

*

Harmadik megoldás dr. Sós Ernő tanár részéről.

Legyen az adott, komplex elemekkel biró determinάns:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 e^{i\alpha_1} & a_2 e^{i\alpha_2} & a_3 e^{i\alpha_3} \\ b_1 e^{i\beta_1} & b_2 e^{i\beta_2} & b_3 e^{i\beta_3} \\ c_1 e^{i\gamma_1} & c_2 e^{i\gamma_2} & c_3 e^{i\gamma_3} \end{vmatrix},$$

$$D = a_1 b_2 c_3 e^{i(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)} + a_2 b_2 c_1 e^{i(\alpha_2+\beta_3+\gamma_1)} + a_3 b_1 c_2 e^{i(\alpha_3+\beta_1+\gamma_2)} -$$
$$- a_1 b_2 c_3 e^{i(\alpha_1+\beta_3\gamma+_2)} - a_2 b_1 c_3 e^{i(\alpha_2+\beta_1+\gamma_3)} - a_3 b_2 c_1 e^{i(\alpha_3+\beta_2+\gamma_1)}.$$

Ez a hat tag akkor és csak akkor lehet mind pozitiv, ha

1. $\alpha_1+\beta_2+\gamma_3=2k\pi,$	4. $\alpha_1+\beta_3+\gamma_2=(2h+1)\pi,$
2. $\alpha_2+\beta_3+\gamma_1=2k'\pi,$	5. $\alpha_2+\beta_1+\gamma_3=(2h'+1)\pi,$
3. $\alpha_3+\beta_1+\gamma_2=2k''\pi,$	6. $\alpha_3+\beta_2+\gamma_1=(2h''+1)\pi,$

hol $k \ldots h''$ egész számok.

Ez a hat egyenlet azonban egymásnak ellentmond, a mit legegyszerűbben úgy láthatunk be, hogy például a 6. egyenletben α_3, β_2, γ_1 értékeit 1., 2., 3.-ból behelyettesítjük és kellő csoportosítás után 4. és 5.-t felhasználjuk:

$$\alpha_3+\beta_2+\gamma_1=2k''\pi-(\beta_1+\gamma_2)+2k\pi-(\alpha_1+\gamma_3)+2k'\pi-(\alpha_2+\alpha_3)=$$
$$=2(k+k'+k'')\pi-(\alpha_1+\beta_3+\gamma_2+\alpha_2+\beta_1+\gamma_3)=2(k+k'+k'')\pi-$$
$$-\pi(2h+1+2h'+1)=2\pi(k+k'+k''+h+h'+1);$$

tehát $\alpha_3+\beta_2+\gamma_1$ páros többszöröse π-nek, míg 6. szerint páratlan többszöröse. Az 1 ... 6 egyenletrendszernek nincs megoldása, tehát nincs oly, komplex tagokkal biró, harmadfokú determináns, melynek összes hat tagja pozitiv. Természetes, hogy levezetésünk a realis tagokkal biró determinánsokra is érvényes, ha $\alpha_1 \ldots \gamma_3$-t még akkép szorítjuk meg, hogy csak $n\pi$ (n egész szám) alakúak lehessenek. Végül megjegyzendő, hogy az analog tétel minden determinánsra igaz, melynek foka $\geqq 3$, a mit n-ről $n+1$-re való következtetéssel és a determinánsnak egy sora (vagy oszlopa) szerint történő kifejtéssel könnyű belátni.

Ugyan ezt a feladatot megoldotta még Obláth Richard főgimnaziumi tanár. *Szerk.*

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1907. év jún. hó 1-től okt. hó 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1904. évre: Gedő Miksa 6 kor., Tordai Imre 10 kor. Összesen ... 16 kor.

1905. évre: Tordai Imre 10 kor., Winkler Lajos 10 kor. Összesen ... 20 kor.

1906. évre: Csemez József 10 kor., Farkas Gyula 6 kor., Fröhlich Károly 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Kovács Béla 6 kor., Kovács István 6 kor., König Dénes 6 kor., Söpkéz Sándor 10 kor., Szontágh Gusztáv 6 kor., Winkler Lajos dr. 10 kor. Összesen ... 80 kor.

1907. évre: Bellágh Kálmán 10 kor., Biró Sándorné 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bogyó Samu 10 kor., Csopey László 10 kor., Csorba György 6 kor., Dávid Lajos dr. 6 kor., Farkas Gyula dr. 6 kor., Hausbrunner Vilmos 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Juckel Gyula dr. 10 kor., Karlovitz László 10 kor., Kerekes Dezső 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Kiss Gábor 6 kor., Kiss Zoltán 6 kor., Kovács Béla 6 kor., König Gyula dr. 10 kor., Kunszt János 6 kor., Lengyel Imre 6 kor., Mayer Irén 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Nagy József 6 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Pécsi Albert dr. 10 kor., Pék János 6 kor., Prokess Ignácz 6 kor., Purpriger István 6 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Sárossi István 6 kor., Salamon Ernő 6 kor., Scholtz Ágost dr. 10 kor., Simon Tádé 6 kor., Sós Ernő 10 kor., Söpkéz Sándor 10 kor., Szabó József 6 kor., Szekeres Kálmán dr. 10 kor., Szemethy Béla 10 kor., Szokol Pál dr. 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Walther Béla 6 kor., Wéber Márton 6 kor., Wodeczky József 6 kor. Összesen ... 346 kor.

1908. évre: Nagy József 10 kor., Söpkéz Sándor 10 kor. Összesen ... 20 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1907. évre: Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Kilián Frigyes 10 kor., Podolini kegyesrendi gymnasium 10 kor., Ujvidéki kir. kath. főgymn. 6 kor. Összesen ... ... 36 kor.

1908. évre: Kecskeméti áll. főreáliskola ... ... 5 kor.

Összesen befolyt:

		jan. 1-től:
Hátralékokból	116 kor.	266 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	366 «	1441 «
Előfizetési dijakból	41 «	632 «

Kelt Budapesten, 1907 okt. 31-én.

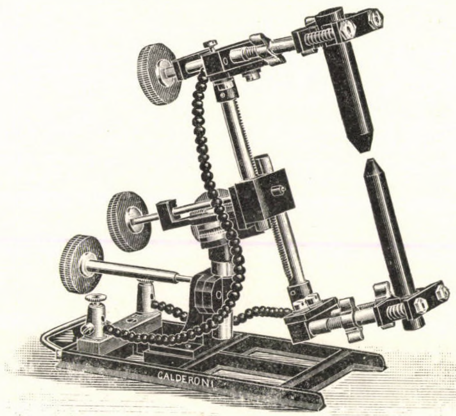
Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **23.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480 cm. négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**-	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.

Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K 260.—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHATODIK ÉVFOLYAM

VII. FÜZET 1907 NOVEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1907.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhatodik társulati év 1907 január 1-jén kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

A TÖBBMÉRETŰ TÉR
FORGÁSAINAK ÉS VÉGES FORGÁSCSOPORTJAINAK ANALYTIKUS TÁRGYALÁSA.

(Első közlemény.)

TARTALOM.

BEVEZETÉS.

A dolgozat tárgya és ennek irodalma.

Dolgozatunk tárgya az n-méretű tér (R_n) forgásainak (I—IV. fej.) és azon véges forgáscsoportjainak (V—VII. fej.) tárgyalása, melyek az n-méretű tér különböző szabályos testjeit önmagukba viszik át.

Az n-méretű geometria első rendszeres, és pedig analytikus tárgyalása JORDAN «Essai»-jében[1] található, melynek különösen a kinematikát tárgyaló VII. fejezete van dolgozatunk-

[1] JORDAN: «Essai sur la géometrie à n dimensions». Bulletin de la Soc. Math. de France, III. (1875).

kal (a III. fejezettel) kapcsolatban. SCHOUTE kétkötetes munkájának[1] inkább csak eredményei és nem módszerei jönnek számunkra tekintetbe.

A háromméretű szabályos testeket, mint köztudomású, már PLATO ismerte. A hozzájuk tartozó forgáscsoportokat KLEIN[2] tárgyalta először. A négy- és többméretű szabályos testek felfedezésének az érdeme STRINGHAM-é,[3] kinek eredménye ez: $n=4$ esetében hat, $n>4$ esetében pedig mindenkor három szabályos test létezik. Ugyanezen eredményeket PUCHTA[4] a mindenesetre tökéletesebb[5] analytikus módszerrel vezeti le, mely az absztrakt csoportelméletbe tartozó eredményekhez is vezet. A négyméretű tér szabályos testjeihez tartozó csoportokat VAN OSS tárgyalja *giesseni* dissertatiójában,[6] a mienktől lényegesen különböző szempontból: a forgástengelylyel nem törődve megelégszik az alcsoportok felsorolásával. Ugyanezzel foglalkozik GOURSAT nagyszabású munkája,[7] mely analytikus alapon tárgyalja a kérdést. Az n-méretű három szabályos test csoportja különösen geometriai szempontból nem igen volt eddig tárgyalva és úgyszólván csupán e csoportok rendszáma $\left(\frac{n!}{2},\ 2^{n-1}n!\text{, illetve } 2^{n-1}n!\right)$ volt ismeretes.[8]

A legegyszerűbb n-méretű szabályos testhez, az ú. n. sim-

---

1 SCHOUTE: «Mehrdimensionale Geometrie». I—II. Leipzig, Göschen (1902, 1905).

2 KLEIN: «Vorlesungen über das Ikosaeder», Leipzig, Teubner (1884).

3 STRINGHAM: «Regular figures in n-dimensional space». American Journal of Mathematics, III. (1880).

4 PUCHTA: «Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raum von 4 Dimensionen». — Wiener Berichte, LXXXIX. (1884) és «Analytische Bestimmung der regelm. conv. Körper im Raume von beliebiger Dimension». — Wiener Berichte, XC. (1884).

5 STRINGHAM maga sem tartotta módszerét tökéletesnek (l. említett munkája végét).

6 VAN OSS: «Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von 4 Dimensionen», Utrecht, 1894.

7 GOURSAT: «Sur les substitutions orthogonales et les divisions regulières de l'espace». Ann. Éc. Norm., 3e S., VI. (1889).

8 L. SCHOUTE említett munkáját (II. kötet, p. 256).

plexhez tartozó «valódi» csoportoknak azonban alacsony n-ekre máris elég nagy irodalma van. Ámde mindenütt e geometriai interpretácziótól függetlenül tárgyaltattak. Egyrészt mint absztrakt csoportokat vizsgálták ezeket, másrészt hozzájuk holoedrikusan isomorph lineáris csoportokat kerestek, lehetőleg kis számú változóval: $n=3$ esete a tetraéder, $n=4$ pedig az ikozaéder csoportjához vezet,[1] t. i. mindkettő isomorph 5 elem alternáló csoportjával. A négyméretű simplex és az ikozaéder csoportjának isomorphismusát VAN OSS vette észre először említett munkájában, de ezt a továbbiakban nem használja fel. E két csoporthoz már kétváltozós lineáris csoport képezhető.[1] Ellenben az ötdimenziós valódi simplexcsoporthoz, mely a 360 operáczióból álló VALENTINER-féle csoporttal[2] isomorph (mindkettő 6 elem alternáló csoportjával isomorph), csak háromváltozós isomorph lineáris csoport képezhető. E csoport részletes tárgyalása WIMAN-tól származik.[3] Legegyszerűbben MASCHKE[4] származtatja le egymásból e lineáris csoportokat, megtoldva egy $\frac{7!}{2}$ substituczióból álló négyváltozós lineáris csoporttal, mely a hatdimenziós simplexcsoporttal isomorph és bebizonyítja, hogy kevesebb változóval ilyen nem képezhető. MASCHKE symmetrikus permutácziócsoporttal isomorph lineáris csoportokkal is foglalkozik, s így $n=2$, 3, 4, 5 esetére a «teljes» simplexcsoporthoz is felállítja a holoedrikusan isomorph minimális számú (3 vagy 4) változójú lineáris csoportokat.

A mi e dolgozat tárgyát részletesebben illeti, az első fejezetben az R_n bizonyos egyszerű «összekapcsolási» törvényeit bizonyítjuk be, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz és bevezetjük az R_n eltolásának, forgásának és általános mozgá-

---

1 L. KLEIN: «Ikosaeder»-jét.

2 VALENTINER: «De endelige Transformations Gruppers-Theorie», Kjobenhavnske Skr. 6 (1889) (avec un resumé français).

3 WIMAN: «Eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen», Mathematische Annalen, 47 (1896).

4 MASCHKE: «Symmetrische und alternirende Collineationsgruppen», Mathematische Annalen, 51 (1898).

sának fogalmát. Majd kimutatjuk, hogy két tetszőleges R_k (II. fej.) és két congruens pontrendszer (IV. fej.) mindig átvihető egymásba. (Ezeken a tételeken alapszik a véges forgáscsoportok tárgyalása.) A III. fejezet pedig az általános R_n-forgás tengelyének méretére vonatkozó kérdést intézi el. Az V. fejezetben rekurzív eljárást adunk a simplex-csúcspontok koordinátáinak meghatározására és kimutatjuk a csoport isomorphismusát az $n+1$ elem symmetrikus illetve alternáló csoportjával. A VI. fej. a simplexcsoportnak a forgástengelylyel kapcsolatos tulajdonságait tárgyalja. Egyik főeredmény itt az, hogy a simplexforgás tengelyének mérete 1-gyel kisebb a létrehozott csúcspont-permutáczió cziklusainak számánál. Az utolsó fejezetben pedig az oktaedroid és hexaedroid csoportját tekintjük hasonló szempontból.

A speczifikusan 2, 3 és 4-méretű szabályos testekkel nem foglalkozunk, minthogy végig egészen általános n-et veszünk fel. Ugyanezen okból nem foglalkozhatunk oly tulajdonságokkal, melyek az n «egyéni» tulajdonságaitól (a primszámosztóktól, stb.) függenek. Különösen két problémára gondolunk itt. Az egyik a csoport minimális számú alkotójának meghatározását követeli. A másik oly minimális számú változót tartalmazó lineáris substituczió találására vonatkozik, mely csoportunkkal isomorph. Ez az eddig elintézetlen probléma általános megoldása mindenesetre egészen más módszereket igényel.

I. Az n-méretű tér lineáris részei és mozgásai.

Az n-méretű teret, R_n-et, mint az

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

számcomplexusok összességét definiáljuk, hol az x számok minden valós, véges értéket felvehetnek. E complexust az R_n egy pontjának is nevezzük, melynek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az n *koordinátája.* Az

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ és } (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

pontok *távolságának* az

$$[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

számot fogjuk nevezni. A $(0, 0, \ldots, 0)$ pontot O-val jelöljük.

Az R_n azon pontjainak összességét, melyeknek koordinátái kielégítenek egy

$$a_1^{(i)}x_1+a_2^{(i)}x_2+\cdots+a_n^{(i)}x_n+a_{n+1}^{(i)}=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

lineáris egyenletrendszert, az R_n egy *lineáris részének* nevezzük. Ha e rendszer mátrixának rangszáma p, akkor $n-p$-t e lineáris rész *méret*ének nevezzük, hiszen a lineáris egyenletrendszerek elmélete szerint két ily rendszer rangszáma megegyezik, ha tartalmuk (gyökrendszereik összessége) ugyanaz. Ismeretes továbbá, hogy e rendszerből kiválasztható p-számú egyenlet oly módon, hogy ezek oly rendszert alkossanak, melynek tartalma az eredetiével megegyezik és melynek mátrixa ugyancsak p-edrangú.

Így tehát minden k-méretű lineáris része az R_n-nek oly $n-k$ egyenletből álló rendszerrel adható meg, melynek mátrixa $n-k$-adrangú, azaz mely «csupa egymástól független egyenletet tartalmaz».

Az R_n-nek k-méretű lineáris részeit R_k-val fogjuk jelölni. (Látni fogjuk t. i. a II. fejezetben, hogy ezek mily szoros vonatkozásban vannak az $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ complexusok összességével.)

Az R_n-nek ezek szerint R_0, R_1, R_2, R_3 jelekkel jelölendő lineáris részeit, mint $n=3$ esetében, úgy általános n-nél is pontnak, egyenesnek, síknak, illetve (háromméretű) térnek is fogjuk nevezni.

Különbözőnek nevezünk két R_k-t, ha az egyik tartalmaz oly pontot, mely a másikban nincs bent. Ez esetben az egyik egyenletrendszer tartalmaz oly egyenletet, mely a másik rendszernek nem folyománya. Két különböző R_k közös pontjai tehát kielégítenek $n-k+1$ független egyenletet és így

I. *Ha az R_n egy lineáris része bentfoglaltatik az R_n két különböző R_k-jában, akkor mérete k-nál kisebb.* Innen továbbá:

II. *Az egyedüli k-méretű lineáris rész, mely R_k-t tartalmazza, maga R_k.*

III. *k-számú pont mindig egy R_{k-1}-ben fekszik* ($k \leqq n+1$).

Legyen

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \quad (i=1, 2, \ldots, k)$$

a megadott k pont. Van egy az

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n & 1 \\ x''_1 & x''_2 & \ldots & x''_n & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \ldots & x_n^{(k)} & 1 \end{matrix} \right\|$$

mátrixra jellemző oly p szám ($p \leqq k$), hogy e mátrix azon aldeterminánsai között, melyek az utolsó oszlopból tartalmaznak elemet, van egy p-edfokú, mely nem tűnik el, míg minden magasabbfokú ily aldetermináns (ha egyáltalán van ilyen) eltűnik. Az el nem tűnő p-edfokú aldetermináns az általánosság megszorítása nélkül így vehető fel:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_{p-1} & 1 \\ x''_1 & x''_2 & \ldots & x''_{p-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \ldots & x_{p-1}^{(p)} & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{I}$$

Az $n-p+1$ számú

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{p-1} & x_\alpha & 1 \\ x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_{p-1} & x'_\alpha & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \ldots & x_{p-1}^{(p)} & x_\alpha^{(p)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\alpha=p, p+1, \ldots, n)$$

egyenletet most már minden $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ rendszer kielégíti. Ha t. i. $i = 1, 2, \ldots, p$, akkor e rendszer helyettesítése után a determináns két sora azonos lesz, ha pedig $i=p+1, p+2, \ldots, n$, akkor (a sorok sorrendjétől eltekintve) az M mátrix oly $p+1$-edfokú aldeterminánsát nyerjük, mely az utolsó oszlopból is tartalmaz elemet. Ez az $n-p+1$ számú egyenlet végül független is egymástól, mert mindegyik tartalmaz egy oly x-et (t. i. x_α-t), mely egy másikban sem szerepel; x_α együtthatója t. i. (I) szerint nem tűnik el.

A k pont kielégít ily módon $n-p+1$, (azaz legalább $n-k+1$) független lineáris egyenletet s így valóban egy R_{k-1}-ben fekszik.

Az I. és III. tételből még a következőhöz jutunk:

IV. *Ha k-számú pont nem fekszik egy R_{k-2}-ben, akkor egy és csak egy oly R_{k-1} van, melyben mind a k pont bent fekszik.*

A következőkben az R_n-nek önönmagán való bizonyos kölcsönösen egyértelmű ábrázolásai fognak fontos szerepet játszani. Különösen oly ábrázolások fognak tekintetbe jönni, a melyeknek megvan a következő két tulajdonságuk:

A) a távolságokat nem változtatja (congruens ábrázolás)

B) k-számú pont akkor és csak akkor fekszik egy R_{k-2}-ben, ha «kép»-eik egy R_{k-2}-ben feküsznek.

Mindkét tulajdonsága megvan először is az

$$x'_i = x_i + d_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletekkel definiált ábrázolásnak, az ú. n. *eltolásnak*. Hiszen

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ és } (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$$

lévén az

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ és } (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

pontok képe valóban fennáll a

$$\sum_{i=1}^{n} (x'_i-y'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2$$

egyenlőség. A mi pedig a *B)* tulajdonságot illeti: ha $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kielégít egy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1} = 0$$

egyenletet, akkor $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ kielégíti a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x'_i-d_i) + a_{n+1} = 0$$

egyenletet és viszont: minden $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$-re fennálló egyenlethez $x'_i = x_i + d_i$ által egy oly egyenlet tartozik, melyet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elégít ki. Minthogy továbbá lineárisan független egyenleteknek ugyanily egyenletek felelnek meg, azért az eltolásoknak valóban megvan a *B)* tulajdonságuk.

A második fontos ábrázolást az ú. n. orthogonális lineáris (homogén) substitucziók szolgáltatják.

Az

$$(S) \qquad x'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

lineáris homogén substitucziót tudvalevőleg akkor nevezik (CAYLEY-vel) *orthogonális*nak, ha az a_{ik}-k úgy vannak választva, hogy identikusan fennáll a

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_{k=1}^{n} x'^2_k = \sum_{k=1}^{n} x^2_k$$

összefüggés. Ezen substitucziók elméletét EULER, CAUCHY és JACOBI alapította meg.[1] Felsoroljuk röviden a későbbiekben felhasználandó és egyszersmind legfontosabb tulajdonságaikat.

(I)-be behelyettesítve az x'-k kifejezéseit és egyenlővé téve a két oldal megfelelő együtthatóit, az orthogonális substitucziókra jellemző következő «orthogonalitási feltételek»-hez jutunk:

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a^2_{ik} = 1 & (i=1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0 & (i, j=1, 2, \ldots, n;\ i \neq j) \end{cases}$$

Kiadódik innen továbbá, hogy, ha $A = |a_{ik}|$ a substitucziό determinánsa, akkor $A^2 = 1$ és így $A = \pm 1$. Végül S-sel együtt S^{-1} is mindig orthogonális substitucziό és S^{-1} nem egyéb, mint

---

[1] A pontos irodalmi utalások pl. BALTZER «Determinanten»-jában találhatók, a 4. kiadás (Leipzig, 1875) 172. lapján.

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i; \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

úgy, hogy (II)-ből az a-k két indexének felcserélésével egy második identitásrendszerhez jutunk. Minthogy továbbá két orthogonális substituczió szorzata a definiczió szerint szintén orthogonális, azért az orthogonális substitucziók csoportot alkotnak. Vonással mindig az S substituczió véghezvitelét jelezve, a (II) képletekkel könnyen verifikáljuk a következő képletet is:

$$\sum_{i=1}^{n} (x'_i - y'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

Az (S)-sel megadott ábrázolásnak, melyet — a szerint, hogy $A=1$ vagy $A=-1$ — az R_n *valódi* illetve *nem valódi (O körüli) forgásának* nevezünk, e szerint megvan az *A)* tulajdonsága. Hogy a *B)* tulajdonságuk is megvan, ép úgy mutatható ki, mint az eltolásokra.[1]

Eltolások és forgások összetevésével definiált minden ábrázolást az R_n *mozgásának* nevezzük, és így ezek csoportot alkotnak. A mozgásnak, mely tehát mindig, mint lineáris szubstituczió adható meg, megvan tehát mind az *A)*,[2] mind a *B)* tulajdonsága. Ha van oly mozgás, mely egy pontrendszert egy másikba visz át, akkor röviden azt mondjuk, hogy az egyik pontrendszer a másikba «átvihető». Ekkor természetesen a második is átvihető az elsőbe. Minden S mozgáshoz tartozik t. i. egy S^{-1} úgy, hogy $SS^{-1}=1$.

Az eddigiekhez hasonló meggondolásokkal belátható a következő tétel is:

V. *Minden mozgás egy R_k-t ismét egy R_k-ba visz át.*

Annak a bizonyítását, hogy két R_k egyszersmind mindig átvihető egymásba, a következő fejezet tartalmazza.

---

[1] A *B)* tulajdonsága t. i. minden olyan lineáris substituczióval definiált ábrázolásnak megvan, melynek determinánsa nem zérus. Egyébként a *B)* tulajdonság folyománya *A)*-nak.

[2] Különböző pontok tehát mozgással különböző pontokba mennek át.

II. A lineáris részek forgása.

I. *Adva lévén a tetszőleges*

$$P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

pont, mindig van oly valódi forgás, mely ezt a $(0, 0, \ldots, 0, d)$ *pontba viszi át, ha*

$$d^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{0^2}.$$

A tétel $n=2$ esetére igaz lévén, feltehetjük, hogy $n>2$, és hogy minden n-nél kisebb méretszámra is igaz úgy, hogy van oly valódi forgás S, mely az R_{n-1}-nek $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ pontját $(0, 0, \ldots, 0, d')$-be viszi, hol $d'^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{0^2}$. Ugyanez az orthogonális substituczió, mint az R_n forgását tekintve, (azaz $x'_n = x_n$-nel kiegészitve gondolva) P_0-t $(0, 0, \ldots, 0, d', x_n^0)$-ba viszi, minthogy x_n nem is szerepel benne. Ha most még

$$T: \begin{cases} x'_{n-1} = b_{11} x_{n-1} + b_{21} x_n \\ x'_n \quad = b_{12} x_{n-1} + b_{22} x_n \end{cases}$$

oly kétméretű, tehát létező valódi forgás, mely (d', x_n^0)-t $(0, d)$-be viszi át, hiszen

$$d^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{0^2} + x_n^{0^2} = d'^2 + x_n^{0^2};$$

akkor — T-t is most, mint az R_n forgását értelmezvén — ST a keresett forgást adja: $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$-t átviszi $(0, 0, \ldots, d)$-be, miután az S először $(0, 0, \ldots, d', x_n^0)$-ba vitte; T innen — nem változtatván az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ koordinátákat — valóban $(0, 0, \ldots, 0, d)$-be viszi.

II. *Egy tetszőleges O-n átmenő egyenes:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} x_k = 0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1)$$

átvihető valódi forgással az

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_{n-1} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott egyenesbe, az ú. n. x_n-koordináta tengelybe.

Legyen t. i. $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ az adott egyenes egy pontja, akkor ez az I. tétel szerint egy valódi forgással $(0, 0, \ldots, 0, d)$-be vihető, hol

$$d^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{0^2}.$$

Ha ez a forgás az adott egyenest

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(i)} x_k = 0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1)$$

egyenesbe viszi, akkor, minthogy $(0, 0, \ldots, 0, d)$ rajta fekszik ezen egyenesen:

$$b_n' = 0,\ b_n'' = 0,\ \ldots,\ b_n^{(n-1)} = 0,$$

úgy hogy

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_{n-1} = 0$$

kielégíti az új egyenes egyenletrendszerét, azaz tartalmazza az x_n-tengelyt és így az I. fejezet II. tétele szerint — mint bizonyítandó volt — ezzel megegyezik.

A bebizonyított tétel így általánosítható:

III. *Egy tetszőleges O-n átmenő R_k:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} x_k = 0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-k)$$

átvihető valódi forgással az

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_{n-k} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott R_k-ba.

Feltehetjük, hogy $k > 1$, mert $k = 1$ esetében az utolsó tétel a bebizonyítandót adja; $n = 2$ esetében is igaz a tétel s így feltehetjük, hogy n-nél kevesebb méretű terekre és k-nál kevesebb méretű lineáris részekre is igaz és teljes indukczióval bizonyíthatunk. Legyen R'_{k-1} az R'_k egy része. Feltevésünk szerint R'_{k-1} egy valódi S forgással átvihető az

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_{n-k+1} = 0$$

-sal megadott R_{k-1}-be. Ez az S az R'_k-t oly R''_k-be viszi át, mely ezen R_{k-1}-et tartalmazza. Az R''_k egyenletrendszerét tehát

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_{n-k+1} = 0$$

kielégíti, úgy, hogy ez csak ily alakú lehet

$$b_1^{(i)} x_1 + b_2^{(i)} x_2 + \cdots + b_{n-k+1}^{(i)} x_{n-k+1} = 0.$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-k)$$

Minthogy $k>1$, azért $n-k+1<n$ és feltevésünk szerint van oly T $+1$ determinánsú orthogonális substitucziója $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}$-nek, mely ezt

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_{n-k} = 0$$

-ba, azaz az R_k-ba viszi át. Ez a T is, mint az R_n valódi forgása tekinthető és akkor ST a keresett valódi forgás.

[A geometriai elnevezésektől függetlenül, mint algebrai tétel eredményünk így mondható ki:

Mindig van oly $+1$ determinánsú orthogonális substituczió:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x'_i,$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

mely az r számú ($r \leqq n$) független lineáris egyenletből álló

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(i)} x_k = 0$$
$$(i=1, 2, \ldots, r)$$

rendszert az

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_r = 0$$

rendszerbe viszi át.]

Ha R'_k is és R''_k is átmegy O-n, akkor a most bebizonyitott tétel szerint van oly S' és S'' valódi forgás, mely R'_k-t, illetve R''_k-t az

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_{n-k} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott R_k-ba viszi át. Ekkor az $S'S''^{-1}$ valódi forgás R'_k-t R''_k-be viszi át. Tehát:

IV. *Ha R'_k és R''_k átmegy O-n, van oly valódi forgás, mely R'_k-t R''_k-be viszi át.*

Hogy a bebizonyított tételt még valamivel általánosabban mondhassuk ki, még a következő tételre van szükségünk:

V. *Adva lévén egy tetszőleges R'_k, ez eltolással átvihető egy O-n átmenő R''_k-be úgy, hogy az R'_k tetszőleges $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ pontja O-ba jusson.*

Ez egyszerűen az

$$x_i = x'_i + x_i^0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

eltolással érhető el. Ha t. i. R'_k-t

$$a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + \cdots + a_n^{(i)} x_n + a_{n+1}^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n-k)$$

definiálja, akkor ez a fenti eltolással az

$$a_1^{(i)} (x'_1 + x_1^0) + a_2^{(i)} (x'_2 + x_2^0) + \cdots + a_n^{(i)} (x'_n + x_n^0) + a_{n+1}^{(i)} = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

azaz

$$(a_1^{(i)} x'_1 + a_2^{(i)} x'_2 + \cdots + a_n^{(i)} x'_n) + (a_1^{(i)} x_1^0 + a_2^{(i)} x_2^0 + \cdots + a_n^{(i)} x_n^0 + a_{n+1}^{(i)}) = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszerrel megadott R''_k-be megy át. Minthogy feltevés szerint:

$$a_1^{(i)} x_1^0 + a_2^{(i)} x_2^0 + \cdots + a_n^{(i)} x_n^0 + a_{n+1}^{(i)} = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

azért e rendszer homogén és R''_k valóban átmegy O-n.

Egybevetve az utolsó két tételt:

VI. *Minden R'_k átvihető (egy eltolással és egy valódi forgással) az*

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_{n-k} = 0$$

vagy ép így a

$$x_{k+1} = 0,\ x_{k+2} = 0, \ldots, x_n = 0$$

egyenletrendszerrel megadott R_k-ba és pedig úgy, hogy az R_k' tetszőleges pontja jusson O-ba. Az utóbbi R_k nem egyéb, mint az R_n

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$$

pontjainak összessége, hol $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tetszőleges szám lehet s ily módon azonosítható az $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ complexusok összességével, az eredetileg definiált R_k-val. Tételünk szerint most már R_n minden k méretű lineáris része leképezhető oly módon erre az R_k-ra, hogy megfelelő távolságok egyenlők legyenek és egy R_i-ben fekvő pontoknak (és csakis ilyeneknek) ugyanily pontok feleljenek meg. Csak ez teszi jogosulttá azt, hogy $n-k$ független lineáris egyenletet kielégítő pontok összességét R_k-val jelöljük, minthogy R_k eredetileg, mint az $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ complexusok összessége definiáltatott.

Ha R_k'-t az S', R_k''-t pedig az S'' mozgás viszi át az

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_{n-k} = 0$$

-val megadott R_k-ba, akkor $S'S''^{-1}$ az R_k'-t R_k''-be viszi és így:

VII. *Az R_n bármely két lineáris része átvihető egymásba, ha méretük megegyezik és pedig úgy, hogy az első bármelyik pontja a második meghatározott pontjába menjen át.* E mozgás legegyszerűbben[1] mint TST' adható meg, hol T és T' eltolás, S pedig forgás.

III. A forgástengely mérete.

Az R_n legáltalánosabb forgása, mely az orthogonális

$$x_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{S}$$

substituczióval van megadva, változatlanul hagyja az

$$O = (0, 0, \ldots, 0)$$

[1] Az «O-tól különböző pont körüli forgás»-okat t. i. nem vezettük be.

pontot. Felmerül most már az a kérdés, hogy micsoda más pontok maradnak szintén változatlanul. E pontokat *pólus*oknak, összességüket *forgástengely*nek nevezzük. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pont természetesen akkor lesz pólus, ha

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i. \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{I}$$

A tengely pontjait tehát egy lineáris homogén egyenletrendszer szolgáltatja és így

I. *A forgástengely mindenkor az R_n-nek O-n áthaladó lineáris része.*

Az (I) rendszernek akkor és csak akkor van

$$x_k = 0- \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

tól különböző megoldása, ha determinánsa, a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-1 & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

determináns eltűnik (és ekkor egy egész O-n áthaladó egyenes csupa pólusból áll.) Ha általában *p a D determináns rangszáma,* akkor a lineáris részek méretének definicziója szerint:

II. *A forgástengely mérete: $n-p$.*

III. *Ha tehát D minden k-adfokú aldeterminánsa eltűnik, akkor a tengelyméret $\geq n-k+1$ és így a tengely mindenesetre magában foglal egy R_{n-k+1}-et.*

Az S substituczió ± 1 értékű determinánsát A-val jelölve, kimutatjuk, hogy *D eltűnik, ha $A = (-1)^{n+1}$.* Szorozzuk össze e czélból az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

és D determinánst[1] a rendes szorzási szabály szerint, sort sorral komponálva. Az így nyert determináns, tekintetbe véve az orthogonalitás feltételeit abban különbözik D-től, hogy minden elem a megfelelő D-elem negativ értéke. Az egész determináns tehát D-nek $(-1)^n$-szerese:

$$AD = (-1)^n D$$

és így $A=(-1)^{n+1}$ esetében valóban $D=0$.[2]

Megkülönböztetve páros és páratlan n esetét III. tekintetbe vételével (most $k=n$), ezen eredményünk így mondható ki:

IV. *Páratlan méretű tér valódi forgása és páros méretű tér nem valódi forgása változatlanul hagyja egy O-n áthaladó egyenes minden pontját.*[3]

Legyen általában R'_k az S forgás tengelye. A II. fejezet III. tétele szerint van oly T forgás, mely R'_k-t az

$$x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_{n-k}=0$$

egyenletekkel megadott R^0_k-ba viszi. Ez az R^0_k tehát tengelye a $T^{-1}ST$ forgásnak, melynek determinánsa, mint ismeretes, egyenlő S determinánsával, A-val. Tekintetbe véve, hogy $T^{-1}ST$ a

$$(0, 0, \ldots, 0, x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$$

pontokat önmagukba viszi át, e forgás determinánsa ilyen alakú:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1,n-k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-k,1} & \cdots & r_{n-k,n-k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_{n-k+1,1} & \cdots & r_{n-k+1,n-k} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,1} & \cdots & r_{n-1,n-k} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ r_{n1} & \cdots & r_{n,n-k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv |c_{\mu\nu}|,$$

[1] $n=3$ esetében e módszert WEBER alkalmazta (Lehrbuch der Algebra, II. kötet, 246. l., 2. kiadás).

[2] Ez speciális esete az ú. n. SIACCI-féle determinánstételnek, lásd PASCAL: «Determinanten»-ját, a német fordítás (Teubner, 1900) 168. l.

[3] Páratlan n-re e tételt SCHLÄFLI bizonyította be: «Über invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution...», Journal f. Math., 65. k.; l. továbbá JORDAN említett «Essai...»-jét. A tételt $n=3$ esetére már EULER ismerte (1776). Végtelen kis mozgásra ($n=3$-nál): D'ALEMBERT (1749). Lásd SCHOENFLIES: Geometrie der Bewegungen (Teubner, 1886) 48. l. és 193. l. (14. j.)

hol még az utolsó k sor első $n-k$ eleme is zérus, minthogy az orthogonalitási feltételek első sorozata szerint az egy sorban lévő együtthatók négyzetösszege 1. Minthogy a tengelyméret: k, azért a

$$|c_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}| \quad \left(\varepsilon_{\mu\nu}=\begin{cases}0, \text{ ha } \mu\neq\nu\\ 1, \text{ ha } \mu=\nu\end{cases}\right)$$

determináns rangja: $n-k$ és így

$$|r_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}|_{\mu,\,\nu=1,2,\ldots,n-k}\neq 0, \tag{I}$$

minthogy $|c_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}|$ többbi $n-k$-adfokú aldeterminánsa identikusan 0. A $|c_{\mu\nu}|$ determinánssal együtt a

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu,\,\nu=1,2,\ldots,n-k}$$

determináns maga is kielégíti az orthogonalitási feltételeket és így (I) az utoljára bebizonyított tétel szerint csak

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu,\,\nu=1,2,\ldots,n-k}=(-1)^{n-k}$$

esetben lehetséges (n helyére itt t. i. $n-k$ lép). Ennélfogva, minthogy

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu,\,\nu=1,2,\ldots,n-k}=|c_{\mu\nu}|_{\mu,\,\nu=1,2,\ldots,n}=A,$$

azt nyerjük, hogy

$$A=(-1)^{n-k}.$$

Eredményünk tehát ez:

V. *Valódi forgásnál a tengelyméret* (k) *n-nel együtt páros vagy páratlan, nem valódi forgásnál pedig a tengely mérete páros vagy páratlan, a szerint, a mint n páratlan vagy páros.*[1]

Minthogy másrészt bármily $n+1$-nél kisebb szám is a k:

$$x'_i=x_i, \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$x'_j=-x_j \quad (j=k+1,\,k+2,\ldots,n)$$

oly forgás, melynél a tengely dimenziója: k; és e forgás valódi vagy nem, a szerint, hogy $n-k$ páros-e vagy páratlan (t. i. $A=(-1)^{n-k}$) azért:

[1] E tételnek, mint determinánstételnek, bizonyos speciális eseteire vonatkozólag lásd STIELTJES és NETTO czikkeit az Acta Mathematica 6. és 9. kötetében, továbbá PASCAL «Determinanten»-jának 168—175. lapjait.

VI. *Ha n páros (páratlan), akkor valódi forgásnál a tengelyméret minden páros (páratlan) szám, nem valódinál minden páratlan (páros) szám lehet, feltéve természetesen, hogy e szám $\leq n$.*

Ezzel az n-méretű tér forgásának tengelyére vonatkozó kérdés teljesen el van intézve. Eredményünk ez:

VII. *Az n-méretű tér valódi forgásának a tengelye vagy az R_n (az identikusnál) vagy egy R_{n-2}, vagy egy R_{n-4}, stb.; nem valódi forgás tengelye pedig csak egy R_{n-1}, vagy egy R_{n-3}, vagy egy R_{n-5}, stb. lehet.*

Mindezen esetek be is következhetnek.[1]

IV. Pontrendszerek forgása.

I. *Ha az R_n-nek $n-1$ számú $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ pontja nem fekszik O-val együtt egy R_{n-2}-ben, akkor az identikus forgás az egyedüli valódi forgás, mely mindezeket a pontokat változatlanul hagyja.*

Tételünk igaz lévén $n=2$ esetére, feltehetjük, hogy $n-1$-re igaz és teljes indukczióval bizonyíthatunk.

1. Legyen P_{n-1} először az x_n-tengelyen:

$$P_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, x_n^{(n-1)}).$$

Közvetetlenül belátható, hogy minden $+1$ determinánsú orthogonális substituczió, mely ezt nem változtatja, ily alakú:

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} x'_k = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_k & (k=1, 2, \ldots, n-1) \\ x'_n = x_n, & \end{array} \right.$$

hol

$$(S') \qquad x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

[1] Abból tehát, hogy sík valódi forgásának tengelye: pont, a háromdimenziós tér valódi forgásának tengelye: egyenes, egyáltalában nem szabad arra következtetni, hogy az R_n valódi forgásának csak egy R_{n-2} lehet a tengelye.

az R_{n-1} egy valódi forgását adja. Ha most már (S) nem változtatja a

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

pontokat, akkor S' nem változtatja a

$$Q_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}) \quad (i=1, 2, \ldots, n-2)$$

pontokat. Ezen $n-2$ pont nem fekszik O-val együtt egy R_{n-3}-ban. Ha t. i. coordinátáik $(n-1)-(n-3)$, azaz két független lineáris egyenletet kielégítenének, akkor ez egyszersmind azt jelentené, hogy $O, P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$ egy R_{n-2}-ben feküdnék. Minthogy ezen egyenletek x_n-et nem tartalmazzák, azért $(0, 0, \ldots, 0, 0)$-val együtt $P_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, x_n^{(n-1)})$ is kielégítené őket és így $O, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ egy R_{n-2}-ben feküdnék, a mi feltételünkkel ellenkezik.

Minthogy $n-1$-re tételünket helyesnek teszszük fel, azaz tudjuk, hogy az $O, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}$ pontokat a valódi forgások közül csak az identikus hagyja változatlanul, azért S' tehát S is valóban csak az identikus substituczió lehet.

2. Ha másodszor P_{n-1} nem fekszik az x_n-tengelyen, akkor az II. fejezet I. tétele szerint van oly valódi forgás T, mely P_{n-1}-et az x_n-tengely $P'_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, d)$ pontjába viszi, hol

$$d = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(n-1)})^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Tegyük fel, hogy a T a P_i pontokat P'_i-be viszi, akkor a forgások *B)* tulajdonsága szerint (l. a 8. lapon) ezek sem feküsznek O-val egy R_{n-2}-ben. A bebizonyitottak szerint tehát az identikus forgás az egyedüli valódi forgás, mely a P'_i-kat egyidejűleg nem változtatja. Ha most már S tetszőleges oly valódi forgás, mely a P_i-ket nem változtatja, akkor $T^{-1}ST$ nem változtatja a P'_i pontokat és így

$$T^{-1}ST = 1$$

az identikus forgás és innen valóban, mint bizonyítandó volt:

$$S = TT^{-1} = 1.$$

Ezzel a kimondott tétel általánosságban be van bizonyítva.

Általánosabban így mondható ki:

II. *Ha $n-1$ számú pont nem fekszik O-val egy R_{n-2}-ben, akkor legfeljebb egy olyan valódi forgás van, mely ezeket meghatározott $n-1$ pontba viszi át.*

Ha t. i. S is és S' is ilyen valódi forgás, akkor SS'^{-1} az eredeti pontrendszert nem változtatja meg s így utolsó tételünk szerint

$$SS'^{-1}=1$$

az identikus forgás. Innen valóban: $S=S'$.

Meg akarjuk most vizsgálni, hogy valamely pontrendszer mikor vihető át valódi forgással egy másikba. Rövidség kedvéért *congruens*eknek fogjuk nevezni (k tetszőlegesen nagy lévén) a

$$(P_1, P_2, \ldots, P_k) \text{ és } (P_1', P_2', \ldots, P_k')$$

pontrendszereket (a megadott sorrendben véve a pontjait), ha

$$\overline{P_iP_j}=\overline{P_i'P_j'}, \quad (i, j=1, 2, \ldots, k)$$

$\overline{P_iP_j}$-vel a P_i és P_j pontok távolságát jelölvén.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

III. *Ha $(O, P_1, P_2, \ldots, P_r)$ és $(O, P_1', P_2', \ldots, P_r')$ congruens, akkor van oly forgás, mely P_i-t átviszi P_i'-be $(i=1, 2, \ldots, r)$.*

Tételünk igaz lévén $n=1$-re, teljes indukczióval bizonyítunk. Legyen

$$P_i=(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}), \quad P_i'=(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}). \quad (i=1, 2, \ldots, r)$$

Először felteszszük, hogy P_r az x_n-tengely pontja és $P_r'=P_r$, azaz

$$x_k^{(r)}=0, \quad y_k^{(r)}=0, \quad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

$$x_n^{(r)}=y_n^{(r)}=d.$$

Innen most már, ha

$$OP_i=OP_i'=r_i \text{ és } P_rP_i=P_rP_i'=s_i, \quad (i=1, 2, \ldots, r)$$

azaz

$$r_i^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k^{(i)})^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k^{(i)})^2,$$

$$s_i^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)})^2 + (x_n^{(i)} - d)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (y_k^{(i)})^2 + (y_n^{(i)} - d)^2,$$

kivonással azt nyerjük, hogy

$$s_i^2 - r_i^2 = -\ 2dx_n^{(i)} + d^2 = -\ 2dy_n^{(i)} + d^2,$$

a honnan

$$x_n^{(i)} = y_n^{(i)}.$$
$$(i=1, 2, \ldots, r)$$

Tekintsük az R_{n-1} következő pontjait:

$$Q_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}), \quad Q_i' = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{n-1}^{(i)}),$$
$$(i=1, 2, \ldots, r\ 1)$$

melyekre vonatkozólag fennáll:

$$\overline{OQ_i}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)})^2 = \overline{OP_i}^2 - x_n^{(i)^2} = \overline{OP_i'}^2 - y_n^{(i)^2} = \overline{OQ_i'}^2$$

és

$$\overline{Q_iQ_j}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)} - x_k^{(j)})^2 = \overline{P_iP_j}^2 = \overline{P_i'P_j'}^2 = \overline{Q_i'Q_j'}^2$$

úgy, hogy $(O, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{r-1})$ és $(O, Q_1', Q_2', \ldots, Q_{r-1}')$ congruens. Minthogy pedig $n-1$-re tételünket helyesnek teszszük fel, felvehetjük, hogy van oly orthogonális substituczió

$$x_k' = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_i,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1)$$

mely a Q_i-ket a Q_i'-kbe viszi át. Minthogy $x_n^{(i)} = y_n^{(i)}$ csak az

$$x_n' = x_n$$

substitucziót kell ehhez hozzávennünk és az R_n oly forgásához jutunk, mely követelményünknek megfelel: $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$-t $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})$-be viszi.

Áttérünk tehát az általános esetre. Ha

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^{(r)})^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k^{(r)})^2 = d^2,$$

akkor a II. fejezet I. tétele szerint van oly valódi forgás T, mely P_r-et $\bar{P}=(0, 0, \ldots, 0, d)$-be viszi. Épígy van egy valódi forgás T', mely P'_r-t viszi ugyancsak $(0, 0, \ldots, 0, d)$ be. T általában a P_i-ket $\bar{P}_i$-ba, T' a P'_i-ket $\bar{P}'_i$-ba vigye át ($\bar{P}_r=\bar{P}'_r=\bar{P}$). A $(\bar{P}_i)$ és $(\bar{P}'_i)$ congruens pontrendszerekre tételünk tehát a bebizonyítottak szerint alkalmazható: van oly valódi forgás S, mely a $\bar{P}_i$-ket a $\bar{P}'_i$-kbe viszi át. Most már tehát:

T átviszi a P_i-ket $\bar{P}_i$-kba,
S « « $\bar{P}_i$-kat $\bar{P}'_i$-kba,
T'^{-1} « « $\bar{P}'_i$-kat P'_i-kbe,

és így tehát TST'^{-1} a P_i-ket a P'_i-kba viszi át, a mivel a keresett forgás létezése be van bizonyítva.

Abban a speczialis esetben, midőn $r=n-1$ a most részletezett eljárással bizonyítható, hogy a III. tétel követelményeit mindig kielégíti egy *valódi* forgás, mivelhogy $n=2$ esetében ez így van. Egybevetve ezen eredményt a II. tétellel, a következő tételt nyerjük:

IV. *Adva lévén két congruens pontrendszer* $(O, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})$ *és* $(O, P'_1, P'_2, \ldots, P'_{n-1})$, *egy és csak egy oly valódi forgás létezik, mely egyidejűleg minden* P_i*-t* P'_i*-be visz át, feltéve, hogy* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ *nem fekszik* O*-val egy* R_{n-2}*-ben.*

Az I. és II. tételnek nem valódi forgásra vonatkozólag a következő két tétel felel meg:

V. *Ha az* $n-1$ *számú* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ *nem fekszik* O*-val egy* R_{n-2}*-ben, akkor egy és csak egy nem valódi forgás hagyja ezeket változatlanul.*

Ha t. i. a $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ pontok az $x_1=0$ egyenlettel megadott R_{n-1}-ben feküsznek, akkor a nem valódi

$$x'_1=-x_1,\; x'_2=x_2, \ldots, x'_n=x_n \tag{S}$$

forgás e pontokat nem változtatja. Az általános esetben pedig az $O, P_1, \ldots, P_{n-1}$ pontok által meghatározott R_{n-1} — a II. fejezet eredményei szerint — egy valódi T forgással az $x_1=0$-sal megadott R_{n-1}-be vihető át. Ha tehát T a P_i-ket P'_i-kbe viszi át, akkor a P_i'-kre nézve az elintézett speciális esettel van dolgunk: van oly nem valódi S forgás, mely a P_i'-ket nem változtatja. Ez esetben azonban TST^{-1} oly nem valódi forgás, mely a P_i-ket viszi át önmagukba. Ha most már két ilyen volna: U és U', akkor UU is és UU' is oly valódi forgás volna, mely a P_i-ket nem változtatja. Az I. tétel szerint tehát

$$1 = UU = UU', \quad U = U'(=U^{-1}).$$

Ezzel a tétel mindkét része be van bizonyítva.

VI. *Ha az $n-1$ számú $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ pont nincs O-val egy R_{n-2}-ben, akkor egy és csak egy nem valódi forgás létezik, mely $(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})$-et a congruens $(P_1', P_2', \ldots, P_{n-1}')$ rendszerbe viszi át.*

Ha t. i. S az a nem valódi forgás, mely a P_i-ket nem változtatja és T a P_i-ket P_i'-kbe átvivő valódi forgás, akkor $U=ST$ a keresett nem valódi forgás. Ha U' is ilyen volna, akkor $UU'^{-1}=1$-ből (I. tétel) ismét $U=U'$ következnék.

Végül még a III. tétel általánosítására lesz szükségünk.

Legyen $(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ és $(P_1', P_2', \ldots, P_r')$ két congruens pontrendszer. Egy T eltolással a P_1, egy T' eltolással pedig a P_1' átvihető O-ba. Ha most már T a P_i-ket $\bar{P}_i$-ba, T' a P_i'-ket $\bar{P}_i'$-ba viszi, akkor a III. tétel szerint $\bar{P}_1=\bar{P}_1'=O$ lévén, van oly S forgás, mely a $\bar{P}_i$-kat a $\bar{P}_i'$-kba viszi s így a TST'^{-1} mozgás a P_i-ket a P_i'-kbe viszi. Tehát:

VII. *Bármily pontrendszer minden congruens pontrendszerbe átvihető.*

Kőnig Dénes.

AZ ELEKTRON-ELMÉLET EREDMÉNYEI ÉS PROBLEMÁI.

(H. A. LORENTZ előadása.)

(Harmadik közlemény.)

A következőkben azon tüneményekkel akarunk foglalkozni, a melyeknél a ponderabilis anyagokba zárt elektronoknak jut szerepük. Azokkal a kérdésekkel, melyeket kiválasztottam, a fémekre vonatkozó elektron-elmélet területére lépünk, melyet WILH. WEBER és KOHLRAUSCH régebbi vizsgálódásaival kapcsolatban a legutolsó években RIECKE, DRUDE,[1] J. J. THOMSON és más kutatók oly nagy sikerrel kifejtettek. Itt mindenekelőtt számot kell adnunk arról a szoros kapcsolatosságról, mely a fémeknek az elektromosságra és a hőre vonatkozó tulajdonságai közt fennáll. Hogy e tekintetben tényleg belső kapcsolat áll fenn, arra már az a tény is rámutat, hogy a fémek a legjobb hővezetők s egyszersmind az elektromosságot is a legjobban vezetik; mindkét tekintetben minden más anyagot messze túlszárnyalnak. Ezenkívül, ha a fémeket egymásközt összehasonlítjuk, mindenkor azt találjuk, hogy magasfokú elektromos vezetőképességgel magasfokú hővezetőképesség jár karöltve. G. WIEDEMANN és FRANZ megfigyeléseik alapján arra következtettek, hogy a megfelelő együtthatók arányának egy meghatározott hőmérsékleten minden fémre vonatkozólag ugyan-

---

[1] Ez év julius 7-én saját kezével vetett véget a tudományra nézve oly becses életének.

azon értéke van. A III. táblázat, mely 18° és 100°-ra vonatkozólag JAEGER és DIESSELHORST gondos méréseinek adatait tartalmazza, azt mutatja, hogy bár a törvény nem áll pontosan, de sok fémre vonatkozólag mégis bizonyos megközelítéssel kielégítettnek mondható.

III. Táblázat.

	$\left(\frac{k}{\sigma}\right)_{18^\circ} . 10^{-8}$	$\left(\frac{k}{\sigma}\right)_{100^\circ} . 10^{-8}$	$\left(\frac{k}{\sigma}\right)_{100} : \left(\frac{k}{\sigma}\right)_{18}$
Aluminium	636	844	1·32
Réz II.	665	862	1·30
Réz III.	671	871	1·30
Ezüst	686	881	1·28
Arany	727	925	1·27
Nikkel	699	906	1·30
Zink	672	867	1·29
Cadmium	706	905	1.28
Ólom	715	935	1·31
Ón	735	925	1·26
Platina	753	1013	1·35
Palladium	754	1017	1·35
Vas I.	802	1061	1·32
Vas II.	838	1114	1·33
Bismut	962	1077	1·12
Konstanton	1106	1310	1·18

A táblázatra nézve megjegyzendő, hogy a k hővezetőképességet a munkaegységekben mért azon hőmennyiséggel fejeztük ki, mely a cm²-nyi felületelemen másodperczenkint keresztül vonul, ha a felületelemre merőleges irányban a hőmérsékleti esés cm-enkint 1° C.

A mi az elektromosságra vonatkozó σ vezetőképességet illeti, annak mértékéül az elektromosságnak ez a mennyisége szolgál, mely a cm²-nyi felületdarabon az időegység alatt átvonul, ha normálisának iránya mentén egységnyi elektromos erő hat.

A vezetőképességek értékeit egyrészt azért nem közöltem, mert ránk nézve csakis azok aránya bir jelentőséggel, másrészt azért nem, mert a kisérletek oly módon voltak berendezve, hogy közvetlenül ezen arány értékét szolgáltatták. Különben fölemlíthetjük, hogy 18°-on k és σ a következő határok közt fekszenek:

$$k = 8{\cdot}1 \,.\, 10^{15} \qquad \sigma = 0{\cdot}84 \,.\, 10^{-5} \text{ (bismut)},$$
$$k = 421 \,.\, 10^{5} \qquad \sigma = 61{\cdot}4 \,.\, 10^{-5} \text{ (ezüst)}.$$

Ebből látható, hogy a $\frac{k}{\sigma}$ arány értékei egymástól sokkal kevésbbé eltérőek.

Követendő utunk azonnal kijelölhető. Kézenfekvő dolog, hogy az elektromos áramot az elektronok haladó mozgásául tekintsük, mely a fématomok közt létező hézagokon keresztül megy végbe. Ha az elektromosság és hővezetés közt egyáltalán konstans vonatkozás áll fenn, akkor kell, hogy ezen mozgékony elektronok, melyeket most mint *szabad* elektronokat fogunk tekinteni, a hővezetésért is felelősséget vállaljanak. Oly más okokat, melyekből hővezetés származhatnék, ki kell zárnunk, vagy azoknak legalább is igen alárendelt szerepet kell tulajdonítanunk.

De hogyan sikerül mozgékony elektronok segítségével hővezetést konstruálnunk? Hogy ez sikerüljön, azért oly elméletre fogunk támaszkodni, mely első tekintetre a mi problémánkkal semmiféle kapcsolatban nem áll, t. i. a gázok kinetikai elméletét hivjuk segítségül. Önök tudják, hogy ez az elmélet a molekulák gyors és rendezetlen mozgásán alapszik, valamint ismerik azt a két nevezetes eredményt is, a melyre segítségével eljutottak.

Először is minden gázban a molekula haladó mozgásának közepes kinetikai energiája arányos T-vel, az absolut hőmérséklettel; másodszor pedig ennek a közepes molekuláris energiának egy bizonyos hőmérsékleten minden gázra vonatkozólag ugyanakkora az értéke, mely érték aT alakjában írható, hol

α-nak mindenkor ugyanakkora értéke van. Ennek a konstansnak — s mi ránk nézve ez a lényeges — még általánosabb jelentése is van. A molekuláris mozgások mathematikai tárgyalása arra a föltevésre vezetett, hogy minden individuális részecske, mely részt vesz a molekuláris mozgásban, akármilyen nagy vagy akármilyen kicsiny is, akár molekula, atom vagy ion, s akármilyen testnek legyen is alkatrésze, közepes értékben mindenkor ugyanakkora kinetikai energiával rendelkezik. Ennélfogva azt fogjuk föltételezni, hogy a fémek szabad elektronjai is minden irányban ide-oda repülésük közben akkora sebességűek, hogy mindegyiknek közepes értékben αT a kinetikai energiája. Ha fölteszszük, hogy esetünkben negativ elektronok szerepelnek, s hogy ezen részecskéknek tömege, mint azt már korábbi tárgyalásainkból tudjuk, igen csekély, akkor föltevésünk igen nagy sebességekre fog vezetni. Ha az elektron tömege a hydrogenatom tömegének 2000-edrésze, tehát a hydrogenmolekulának 4000-edrésze, akkor, hogy akkora kinetikai energiája legyen, mint a mekkora a hydrogenmolekuláé, több mint 60-szoros sebességgel kell mozognia.

Továbbá föl kell tételeznünk, hogy az elektronok épen úgy, mint a gázmolekulák, egyenesvonalú pályájuk mentén nem repülhetnek tetemesebb távolságokra. Mert nem csupán egymásba fognak ütközni, mint a gázmolekulák, hanem mozgékonyságukat a fématomok is korlátozzák, melyek közé zárva vannak. Úgy képzeljük a dolgot, hogy ezen utóbbi körülmény játsza most a főszerepet, s ez határozza meg az egyenesvonalú pályarésznek közepes hosszúságát.

8. Jegyzet. Erre a föltevésre a következő oknál fogva van szükségünk. Ha az elektronok szabad mozgékonyságát az egymás közötti összeütközések is észrevehetőleg korlátoznák, akkor ennek, mint azt a gázelmélettel való összehasonlítás mutatja, befolyása volna a hővezetésre, a nélkül, hogy hatással lenne az elektromos vezetőképességre. Az utóbbi ugyanis az összes elektronoknak egy valamennyiökre ható erő befolyása következtében való együttes áramlása, melynél a kölcsönös összeütközésekből mozgási akadály nem származhat. Az olyan befolyás pedig, mely a két tünemény közül csak az egyiknél érvényesűl, a másiknál pedig hatástalan, megzavarná a két vezetőképesség közti állandó összefüggést, melyet épen megmagyarázni törekszünk.

A hővezetés elméletében most már teljesen követhetjük a gázelmélet példáját. Ha egy függőleges légoszlopnak felül magasabb a hőmérséklete, mint alul, akkor a felső rétegekben találjuk a legnagyobb molekuláris sebességeket. A miközben ezen rétegekből molekulák hatolnak a mélyebben fekvő rétegekbe és viszont lassabban mozgó molekulák az alsó rétegekből a felsőkbe kerülnek, ebből a hőmérsékleti különbség kiegyenlítődésének, tehát hővezetésnek kell származnia. Hasonlónak kell történnie a különböző helyein különbözőképen fölmelegített fém elektronjaival is s itt is minden azon úthosszúságtól függ, melyet a részecskék egyenesvonalúlag befuthatnak. Mennél hosszabb ez az út, annál messzebbre hatolhatnak az egyik rétegből jövő elektronok a másik rétegbe, a mi nyilván az energiaszállításnak, vagyis a hővezetésnek szolgál előnyére.

Ezen megfontolások alapján elindulva, DRUDE a hővezetés együtthatója számára képletet állított föl. Később fölemlítendő okoknál fogva ezt a képletet csak azon egyszerű alakjában fogom használni, melyet akkor vesz föl, ha a fémben a szabad elektronoknak csakis egy fajtája van jelen. Ha ezen részecskéket egymásközt egyenlőknek tekintjük, s térfogategységenkinti számukat N-nel, hőmozgásuk közepes sebességét u-val, a közepes szabad úthosszúságot pedig l-lel jelöljük, míg a a már említett univerzális állandó, akkor DRUDE szerint

$$K = \tfrac{1}{3}\, aNlu.$$

Az elektromos vezetőképességnél is van a hőmozgásnak szerepe, s van a szabad úthosszúságnak befolyása. Ezt a következő megfontolás mutatja: a míg a fémre még elektromos erő nem hat, addig az elektronok mozgása teljesen rendezetlen, azok minden irány felé egyenlő módon repülnek ide s tova. Az elektromos erő ebbe bizonyos rendet hoz, a mennyiben befolyása alatt az erőnek megfelelő irányú mozgások gyakoriabbakká lesznek, — talán csak csekély mértékben ugyan, mi az erő nagyságától függ, — mint az egyéb irányokban végbemenő mozgások. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a már meglevő rendszertelen mozgáshoz annak az iránynak megfelelő meghatározott sebesség, az *áramsebesség* járul. Ha sikerül ezt kiszámítanunk, akkor ebből könnyen meghatározhatjuk azon elektronok számát, melyek időegységenkint és felületegységenkint egy az elektromos erő irányára merőleges felületi elemen áthaladnak. Hogy az elektromos áram számára kifejezést nyerhessünk, még az elektron e töltésével kell szoroznunk, s aztán az elektromos erő számbeli értékével való osztás után a keresett σ vezetőképességet kapjuk.

Tekintetbe veendő az, hogy az elektromos erőnek valódi sysiphusi munkát kell végeznie; alig ruházott föl egy elektront valami csekély sebességgel, ez már egy fématomba való ütközés folytán kárba vész vagy esetleg egészen eltérő irányúvá változik. A számítást, melylyel első közelítéskor meg kell elégednünk, most már következőképen vezethetjük. Ha τ a két egymásra következő összeütközés közt lefolyó időnek közepes értéke, akkor azt állíthatjuk, hogy bizonyos időpillanatban azon idő, melyen keresztül az atommal való utolsó összeütközés óta az elektron az E elektromos erő hatása alatt állott, közepes értékben $\frac{1}{2}\tau$-val egyenlő. Az ezen intervallumban létrehozott sebesség

$$\tfrac{1}{2}\tau \cdot \frac{eE}{m},$$

minthogy a részecskére ható erő eE, s így a gyorsulás $\frac{e \,.\, E}{m}$. Ez a mennyiség, mely helyett

$$\frac{e}{2} \cdot \frac{lE}{mu}$$

is irható, mert

$$\tau = \frac{l}{u},$$

mint az áramlás sebességének értéke veendő számításba. Ismét Ne-vel való szorzás útján a felületegységre időegységenkint jutó áram értékéül

$$\frac{e^2NlE}{2mu}$$

származik, vagy minthogy föltevésünk szerint

$$\tfrac{1}{2}mu^2 = aT,$$

tehát

$$\frac{e^2NluE}{4aT}.$$

Végül a vezetőképességre vonatkozólag a következő egyszerű eredményt kapjuk:

$$\sigma = \frac{e^2Nlu}{4aT}. \tag{8}$$

Ha ezen képletet a k-éval összehasonlítjuk, akkor azt látjuk, hogy az Nlu tényező mindkettőben előfordul. Az N és l mennyiségek, melyek a különböző fémekre vonatkozólag valószínűleg igen eltérőek, az osztásnál kiesnek, s a

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{e}\right)^2 T \tag{9}$$

arány már csak oly mennyiségeket tartalmaz, melyek a fém sajátlagos tulajdonságaitól függetlenek.

Ennélfogva Drudenak tényleg sikerült számot adni a $\frac{k}{\sigma}$ aránynak különböző fémek esetében is mutatkozó állandóságáról, mely körülményt bizonyára az elektron-elmélet legszebb sikereül tekinthetjük.

Képletéből az is kitűnik, hogy a $\frac{k}{\sigma}$ arány az absolut hőmérséklettel arányosan növekszik. 18°-tól 100° C-ig a T növekedése 1 az 1·28 arányában történik, mely szám a III. táblázat utolsó rovatában álló értékekkel igen jól megegyezik.

Ezen eredmények megitélésénél ne téveszszük szem elől azt, hogy az elektron elmélet nélkül a kétféle vezetőképesség közti összefüggésre nézve semmiféle okot sem találnánk.

*

A mikor a különféle mennyiségek absolut értékeit vette tekintetbe, akkor DRUDE az ő képletét valósággal fényesen igazoltnak találta. A (9)-ik egyenletből ugyanis, ha $\frac{k}{\sigma}$ értéket a megfigyelésekből veszszük, $\frac{a}{e}$-t, tehát minden hőmérsékletre nézve $\frac{aT}{e}$ értékét számithatjuk. Ezen utóbbi kifejezést azonban egészen más adatokból is kiszámíthatjuk.

E tekintetben REINGANUMnak megfontolásaira fogunk támaszkodni.

Minthogy e a hydrogenionnak elektromos töltését jelenti, ennélfogva az elektrochemiai egyenértékben foglalt hydrogenionok száma $= \frac{1}{e}$. Képzeljük már most, hogy 1 cm^3-ben épen egy elektrochemiai egyenértéknyi, vagyis 0·000104 gramm hydrogenünk van a közönséges gáznemű állapotban, még pedig annál a T hőmérsékletnél, melyre vonatkozólag a $\frac{k}{\sigma}$ arány ismeretes. Ez a gázmennyiség meghatározott nyomást fejt ki, mely megadható, s a melyet p-vel jelölünk. Minthogy a gáz $\frac{1}{e}$ számú atomot tartalmaz és két-atomos, ennélfogva $\frac{1}{2e}$ számú molekulából áll, úgy hogy ezen haladó mozgásban levő részecskék összes kinetikai energiája $= \frac{aT}{2e}$.

A kinetikai gázelmélet alapképlete szerint a felületegységenkinti nyomás ennek $^2/_3$-része, tehát

$$p = \frac{aT}{3e}.$$

Ha ezt $\frac{aT}{e}$-nek a (9)-ből kiszámított értékével összekötjük, akkor

$$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{k}{\sigma}} = 3p \tag{10}$$

származik.

Minthogy 1 cm^3 hydrogennek tömege 0°-nál és 76 cm higanyoszlop nyomása, tehát 1·013 . 10^6 CGS-egységnyi nyomás alatt 0·0000896 gramm, ennélfogva 18° C-ra vonatkozólag

$$3p = 38 \,.\, 10^5$$

míg $\frac{k}{\sigma}$ nek az ezüst alapul vétele melletti értékére nézve ugyanezen hőmérsékleten

$$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{k}{\sigma} \cdot T} = 38 \,.\, 10^5,$$

mi a megelőzővel teljesen megegyezik.

Ez igen szép megegyezés oly számokra nézve, melyeknek kiszámitásához a fizikának igen különböző részei szolgáltatták a szükséges adatokat.

Sajnos, hogy a megegyezés fölötti örömüket bizonyos tekintetben azonnal meg kell zavarnom. Midőn t. i. Drude számításainak ismétlésekor az elektronraj egyes részeinek mozgására kissé behatóbban kiterjeszkedni törekedtem, a (9) képlet helyett a következőre jutottam:

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{8}{9} \left(\frac{a}{e}\right)^2 \cdot T$$

minélfogva a (10) képlet a következő alakot ölti:

$$\sqrt{\frac{9}{8} \frac{k}{\sigma} \cdot T} = 3p.$$

Ennek baloldala 47 . 10^5, tehát $3p$-nek értékétől számbavehető módon eltér.

Az eltérés okát igen bajos megmagyarázni. Talán — s ez volna a legörvendetesebb — számításaimba valami hiba csúszott, vagy talán egy még behatóbb megfontolás — hiszen én is használtam néhány a dolgot egyszerűsitő fölvételt — oly számértékre vezetne, mely a Drude-féle eredménytől kevésbbé eltérő. De az is lehetséges, hogy a dolog még sem olyan egyszerű, mint a milyennek most tekintettük, s hogy a hővezetésnél a teljesen szabad elektronok mozgásán kivül még más körülmények is befolyással vannak. Azonban bármiként áll is a dolog, azt a következtetést fentarthatjuk, hogy a gázmolekulákhoz hasonlatosan egy a hőmérséklettől függő sebességgel mozgó szabad elektronok elmélete első közelítéssel képes a hővezetést és az elektromosság vezetését, valamint a két tünemény kapcsolatát illetőleg számot adni.

Ford. Bozóky Endre.

A Mathematikai és Physikai Társulat XIV. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 12-én tartott XIV. tanulóversenyre Budapesten 67, Kolozsvártt 4 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett teljesen rendben folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen jegyzőkönyv vétetett fel, melynek tanúsága szerint a tételek kidolgozására engedett 4 órai idő alatt Budapesten 52, Kolozsvártt 3 dolgozat adatott be. A mult évhez képest a versenyzők száma 6-tal, a beadott dolgozatok száma 15-tel nőtt.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Jelentsen p és q két páratlan egész számot. Bebizonyítandó, hogy az

$$x^2+2px+2q=0$$

egyenletnek gyökei nem lehetnek raczionális számok.

2. Bebizonyítandó, hogy az $ABCD$ parallelogramma kerületén belül tetszés szerint választott P pontnak a hozzá legközelebb eső parallelogramma-szögponttól való távolsága sohasem nagyobb az ABD háromszög körül írt kör sugaránál.

3. Legyen az $\frac{r}{s}$ raczionális valódi tört tizedes tört alakja

$$\frac{r}{s}=0{\cdot}k_1k_2k_3\ldots;$$

bebizonyítandó, hogy a

$$\sigma_1=10\frac{r}{s}-k_1,\quad \sigma_2=10^2\frac{r}{s}-(10k_1+k_2),$$

$$\sigma_3=10^3\frac{r}{s}-(10^2k_1+10k_2+k_3),\ldots$$

számok sorában legalább kettő egymással egyenlő.

A versenydolgozatok nyomban a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes birálatra Szijártó Miklós tanár úrnak adattak ki. A teljes biráló bizottság üléséről és határozatáról a következő jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

A math. és phys. társulat XIV. tanulóversenyén beadott dolgozatok megbirálására összehivott bizottságnak 1907 október hó 27-én tartott üléséről.

Jelen voltak: Bartoniek Géza, Éberling József, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Rátz László, Rados Gusztáv, Szekeres Kálmán és Szijártó Miklós előadó.

A bizottság a beadott dolgozatokat gondosan átnézve, azt határozta, hogy: Az első díjat *Tolnai Jenőnek* a *budapesti VIII. ker. reáliskola* volt növendékének és *dr. Kopp Lajos* tanítványának adja ki, mivel az illető versenyző nemcsak hogy mind a három feladatot jól megoldotta, hanem a 3. feladatot, a többi versenyző közül kitünve, minden segédtétel nélkül önálló mathematikai szemlélet alapján oldotta meg.

A második díjat *Domokos Györgynek* a *keszthelyi* r. kath. főgymnázium volt növendékének és *Vargha István* tanítványának adja ki, mint a kinek a dolgozata a felfogás önállóságát illetőleg legközelebb áll az első díjat nyert dolgozathoz.

A biráló bizottság továbbá dicséretre méltónak találta:

1. *Blau Miklósnak* a VI. ker. áll. főreáliskola volt növendékének a dolgozatát, a kit *Rados Ignácz* tanított;

2. *Mayer Lajosnak* a győri r. kath. főgymnázium volt növendékének dolgozatát, a kit *Havadi Barna* és *Saly Brunó* tanítottak és végre

3. *Szendrői Dezsőnek* a győri áll. főreáliskola volt növendékének dolgozatát, a kit *Mihályi Elemér* tanított.

Szijártó Miklós, a biz. előadója, *Kőnig Gyula*, a biz. elnöke.
Bartoniek Géza, *Rátz László*,
Éberling József, *Rados Gusztáv*,
Kövesligethy Radó, *Szekeres Kálmán*,
a biráló bizottság tagja.

A f. évi november hó 14-én tartott választmányi ülés e jelentést tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag hozzájárulván azt határozattá emelte.

A nyomban erre tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, a mire Kőnig Gyula alelnök a nyerteseknek kiosztotta a jutalmat, kérve őket, hogy volt tanáraiknak is adják át a Társulat üdvözletét.

A Mathematikai és Physikai Társulat XIV. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Tolnai Jenő dolgozata.

1°. Az

$$x^2+2px+2q=0$$

egyenlet gyökei csak akkor lehetnek raczionális számok, ha a discriminláns teljes négyzet, vagyis ha:

$$2^2(p^2-2q)=r^2,$$

vagy:

$$p^2-2q=s^2, \quad \left(s=\frac{r}{2}\right) \qquad 1°$$

hol s bármely raczionális, tehát egész vagy tört szám lehet.

1. Ha s egész szám, akkor vagy páros vagy páratlan.

A föntebbi egyenlőségből (1°-ből):

$$2q=p^2-s^2=(p+s)(p-s),$$

ha s páros, akkor úgy $p+s$, mint $p-s$ páratlan, mivel két páratlan számnak szorzata is páratlan, azért nem lehet $(p+s)(p-s)=2q$.

Ha s páratlan, akkor $p+s$ és $p-s$ páros számok. De két páros szám szorzata négygyel osztható s így $(p+s)(p-s)=2q$-nak oszthatónak kellene lennie 4-gyel. De ez nem lehet, mert q páratlan szám.

2. Legyen s törtszám. Ekkor a következő alakban írható:

$$s=\frac{s_1}{s_2} \quad \text{és} \quad p^2-2q=\frac{s_1^2}{s_2^2},$$

(s_1 és s_2 relativ törzsszámok), miből:

$$s_2^2(p^2-2q)=s_1^2,$$

$s_2^2(p^2-2q)$ akkor teljes négyzet, ha p^2-2q is az.

Az előbbiekből ekkor

$$2qs_2^2=(s_2p+s_1)(s_2p-s_1),$$

ha s_2 páros, $2qs_2^2$ osztható nyolczczal, s_2p kettővel, s_1 páratlan, s_2p+s_1 és s_2p-s_1 páratlan, szorzatuk sem lehet páros; ha s_2 páratlan és s_1

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

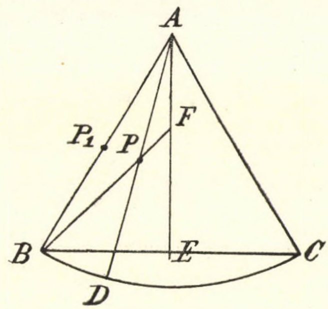
páros, $s_2p \pm s_1$ páratlan, ha s_2 és s_1 is páratlan, $s_2p \pm s_1$ osztható kettővel és $(s_2p+s_1)(s_2p-s_1)$ négygyel. De $2qs_2^2$ csak kettővel osztható.

Mivel valamennyi föltevésünk ellenmondásra vezetett, azért p^2-2q és így az egyenlet gyökei is irraczionális számok.

2°. Segédtétel:

Ha valamely egyenlőszárú háromszög belsejében vagy szárain felveszek egy tetszésszerinti P pontot s azt a legközelebbi csúcscsal összekötöm, e vonal rövidebb, mint az egyik szár:

$$AE \perp BC.$$



Az ábrán közvetlenül belátható, hogy

$$\overline{AP} < AD,$$

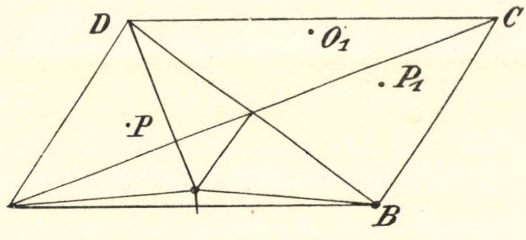
de

$$AD = AB, \text{ s így } \overline{AP} < \overline{AB},$$

vagy:

$$\overline{BP} < \overline{BF} < BA \text{ vagy } \overline{AP_1} < \overline{AB}.$$

Ha $OA = r$ az ABD köré írt kör sugarával, a felvett P pont (ha $ABD\,\Delta$-ben van), vagy $AOB\,\Delta$, vagy $AOD\,\Delta$, vagy $BOD\,\Delta$ száraira esik, vagy szárai közé.



De az előbbiek értelmében, ha a legközelebbi csúcs D, $PD < DO$, de $DO = r$ s így P távolsága a legközelebbi csúcshoz kisebb, mint az $ABD\,\Delta$ köré írt kör sugara.

Ha P nem D-hez van legközelebb, az eset s bizonyítás hasonló.

Ha P BCD területére esik, mivel a $BCD\,\Delta$ köré írt kör sugara ugyanakkora, mint az $ABD\,\Delta$ köré írté, hasonlóan bizonyítjuk be, hogy például $\overline{P_1C} < O_1C$, de $O_1C = OA = r$, s igy $P_1C < r$.

3°. Ha

$$\frac{r}{s} = 0\,.\,k_1k_2\,\ldots\,k_mk_{m+1}\,\ldots,$$

akkor

$$\frac{r}{s} < 0.k_1k_2 \ldots (k_m+1),$$

mert

$$0{\cdot}\underbrace{00\ldots0}_{m}k_{m+1} \quad \text{helyett} \quad 0{\cdot}\underbrace{00\ldots01}_{m}\text{-et}$$

vettük, ekkor:

$$10^m\frac{r}{s} < 10^m \cdot 0{\cdot}k_1k_2 \ldots (k_m+1),$$

vagy:

$$10^m\frac{r}{s} < k_1 \cdot 10^{m-1} + k_2 \cdot 10^{m-2} + \cdots + k_m \cdot 10^0 + 1,$$

vagy:

$$\sigma_m = 10^m\frac{r}{s} - (10^{m-1}k_1 + 10^{m-2}k_2 + \cdots + k_m) < 1,$$

miből:

$$\sigma_m = \frac{10^m r - s(10^{m-1}k_1 + 10^{m-2}k_2 + \cdots + k_m)}{s} < 1.$$

σ_m tehát mindig valódi tört, mert számlálója mindig kisebb, mint nevezője: s, a mi állandó, mivel σ_m számlálójában csak a 0-tól s-ig terjedő számok fordulhatnak elő, ha m-mel az s-edik tagon túlmegyek, már a következő σ_{m+k} számlálójában oly számnak kell előfordulnia, mely már az egyik az előtti σ_l számlálója is volt.

Ha σ_{m+k} számlálója nem volt σ_l számlálója, ez csak úgy lehet, ha az s-edik tagon innen levő két: σ_g és σ_{g_1} számlálója egyezik.

E tárgyalásban feltételeztük, hogy a tizedes tört végtelen, ha azonban nem az, akkor a szakasz után tetszésszerinti 0-t írva, az előbbieket érvényeseknek tekinthetjük e végtelen tizedes törtre vonatkozólag is.

II. Domokos György dolgozata.

I. Jelentsen p és q két páratlan egész számot. Bebizonyítandó, hogy az

$$x^2 + 2px + 2q = 0$$

egyenletnek gyökei nem lehetnek raczionális számok.

1°. Segédtétel:

Bármely egész szám négyzete sem $4k+3$, sem $4k-1$ alakú nem lehet.

Ha ugyanis az adott egész szám páros, négyzete $4n$ alakú. Ha páratlan, így írható

$$m = 2n \pm 1,$$

a melynek négyzete

$$m^2 = 4n' + 1$$

alakú. Ezzel segédtételünk be van bizonyítva.

2°. Most már tételünk könnyen beigazolható. Ugyanis az adott egyenlet discriminánsa

$$D = p^2 - 2q = (2k' \pm 1)^2 - 2(2k'' \pm 1) = 4v' + 1 \pm 2.$$

Ez azonban vagy

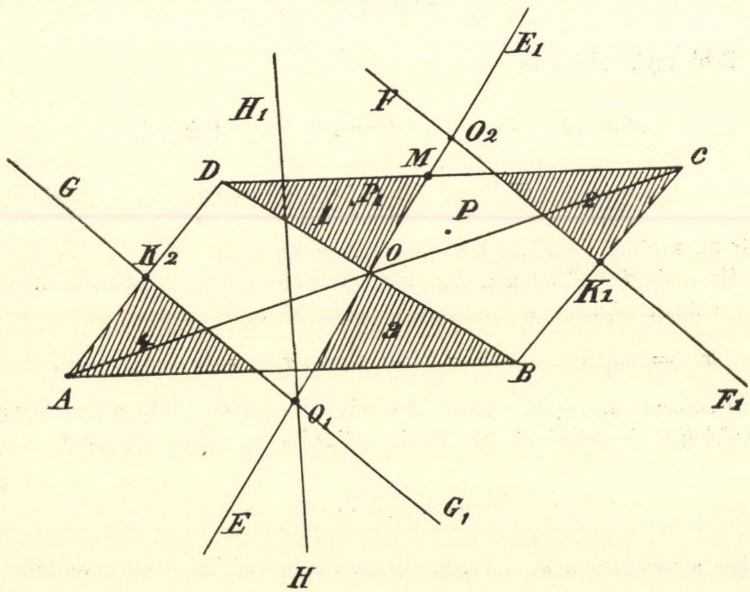
$$4v' + 3,$$

vagy

$$4v' - 1$$

alakú, tehát nem lehet teljes négyzet.

II. Bebizonyítandó, hogy $ABCD$ paralellogramma területén belül tetszésszerint választott P pontnak a hozza legközelebb eső paralellogramm szögponttól való távolsága sohasem nagyobb az $ABD\,\triangle$ körül írt kör sugaránál.



Jelöljük a paralellogramm átlóinak metszéspontját O-val, az ABD és DBC köré írható körök középpontját O_1, O_2-vel, EE_1, FF_1, GG_1, HH_1-el a BC, AD, AB és DB oldalak felezőpontjára állított merőlegeseket. FF_1 talppontja K_1, GG_1-é K_2. Ekkor könnyen belátható, hogy a paralellogrammának az OO_2K_1B négyszögbe eső pontjai B-hez, a DOO_1K_2-ben lévők D-hez, míg az 1, 2, 3, 4-gyel jelölt $\triangle$-ben lévő pontjai a paralellogrammának D, C, B, A-hoz vannak legközelebb. Ha most OO_2BK_1 részben kitűzünk egy P pontot, $PB \leqq PO_2$, mivel

OO_2BK_1 húrnégyszög, és ha $PB > BO_2$-nél, kívül esnék O_2OBK_1-en; azon egy esetben volna $PB = O_2B$, ha OMC szög egyenlő volna $\frac{\pi}{2}$-el. Épúgy például, ha 1.-ben tűzzük ki P'-et, $DP_1 \leqq DO_2$, mivel $DM \leqq DO_2$ és $DP' \leqq DM$, tehát $DP_1 \leqq DO_2$. Egyenlő csak az előbb említett esetben, minden más esetben $DP_1 < DO_2 = R$. Épígy bebizonyítható, a 2, 3, 4-ben és DOO_1K_2-ben lévő pontokról, hogy az illető szögpontoktól való távolságuk $\leqq R$. Mivel α-nak bármily nagyságánál ez okoskodással czélt érhetünk, tételünk be van bizonyítva.

III. Legyen az $\frac{r}{s}$ raczionális valódi tört tizedestört alakja

$$\frac{r}{s} = 0{\cdot}k_1k_2k_3, \ldots$$

Bebizonyítandó, hogy a

$$\sigma' = 10\frac{r}{s} - k_1, \qquad \sigma'' = 10^2\frac{r}{s} - (10k_1 + k_2),$$

$$\sigma''' = 10^3\frac{r}{s} - (10^2k_1 + 10k_2 + k_3)$$

számok sorában legalább kettő egymással egyenlő.

Ha a tizedes tört szakaszos, akár vegyesen, akár tisztán, a sigmák sorozatában végtelen sok egyenlő van, mivel

$$\sigma' = 0{\cdot}k_2k_3 \ldots, \quad \sigma'' = 0.k_3k_4 \ldots, \quad \sigma^{(n)} = 0{\cdot}k_{n+1}k_{n+2} \ldots$$

és e sorozatnak egyes elemei egy bizonyos számon túl, a szakasznak megfelelően ismétlődnek. Ha pedig a tizedestört véges, úgy hogy

$$\frac{r}{s} = 0{\cdot}k_1k_2 \ldots k_r,$$

ekkor a sorozatban σ_{r-1} tagon túl az összes sigmák 0-val egyenlők.

A Mathematikai és Physikai Társulat tizennegyedik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 15-én kibocsátott meghívójára a Mathematikai és Physikai Társulat XIV. rendes közgyűlését f. évi április hó 20-án tartottuk meg, a melyen több érdeklődő vendégen kívül a következő tagok vettek részt:

Anderkó Aurél, Angehrn Tivadar S. J., Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Bodola Lajos, Bogyó Samú, Bricht Lipót, b. Eötvös Loránd, Erdődy Imre, Feichtinger Győző, Fejes Zsigmond (Pápa), Fényes Dezső (Arad), Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Glücklich Vilma, Goldziher Károly, Grúber Nándor, b. Harkányi Béla, Harsányi Dezső, Hausbrunner Vilmos, Horváth József (Pápa), Hubatsek Alajos, Jánosi Imre, Képessy Imre, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Kőnig Dénes, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Mattyasóvszky Kaszián (Pannonhalma), Mikola Sándor, Pekár Dezső, Privorszky Alajos, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Raffmann Jákó, Rátz László, Réthy Mór, Róna Zsigmond, Rucsinszki Lajos, Sós Ernő, Steiner Lajos, Szabó Gábor, Szabó József (Vácz), Szekeres Kálmán, Szemethy Béla, Szijártó Miklós, Szőke Béla, Szücs Adolf, Tőtössy Béla, Winter József, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1907-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést báró Eötvös Loránd elnök nyitotta meg. Szivélyesen üdvözölvén a számos résztvevőt, különösen vidéki tagjainkat, kihirdeti, hogy épen ez utóbbiak kedvéért a közgyűlést követő napon Balog Mór a VI. ker. főreáliskolában, és Szíjártó Miklós a gyakorló főgymnasium-ban középiskolai physikai gyakorlatokat lesznek szívesek bemutattatni; Gobi igazgató és Mikola Sándor pedig szívesen fogják látni azokat, a kik az új ev. ref. főgymnasiumot óhajtják megtekinteni.

A múlt közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jegyzőkönyv hitelesítésére elnök Fényes Dezső és Hubatsek Alajos tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

A Mathematikai és Physikai Társulat fennállása tizenötödik évének történetét kellene ma vázolnom. A mint széttekintek e meghitt körben, örömmel látom a régi arczokat és félős, hogy csak jól ismert dolgok elmondásával tölteném az időt. Jobbat is teszek tán, ha ehelyett azt a tanulságot írom le, a melyet Társulatunk történetéből merítettem.

Kis nemzet vagyunk, gyakran kishitűség fog el. Ily pillanatokban tanuljunk azoktól, a kik tizenöt évvel ezelőtt, rövid öt évi előzetes próbaidő után bátran megalakították Társulatunkat. Ugyan jól ismerték fel, mire képes az erős akarattal párosult tehetség.

A Társulat, nem kis mértékben tanulóversenyei révén ugyan maga is nevelt magának derék ifjú nemzedéket, de a kik a Társulatot szellemileg vezették és támogatták, azok még mindig a régi nevek és fáradhatatlanságuk és áldozatkészségök elismerésre annál inkább méltó, mert hiszen nem ez tette egyetlen feladatukat és mert mindannyian eléggé tapasztalták, hogy, a hol kevesen vannak, ott a köz mindenkire, a ki terhet bir, ugyancsak terheket is ró.

És a kik a középponttól távolabbra esvén, a Társulat életében nagyobb szerepre nem vállalkozhattak, azok ugyanazon számban, csodálatos buzgósággal és lankadatlan lelkesedéssel és mondjuk, gyakran angyali türelemmel is híven tartottak ki zászlónk mellett. A mai csendes jubileum napját azzal ünnepelhetnők meg legméltóbban, ha azon gondolkoznánk, miként lehetne most már anyagilag is consolidált Társulatunkat az áldozatra kész vidéki tagjaink számára minél termékenyebbé tenni. Én, a ki a Társulat szorosabb czímén kívül eső tanulmányaim által ezen nem kiérdemelt helyre inkább sodortattam, ily fontos tárgyban ítéletet mondani nem merek; tapasztalt, szíves munkatársaimtól várom a bölcs tanácsokat.

A XIII. tanulóverseny, mely 1906 október 13-án tartatott meg, fényesen sikerült. Erdős Vilmos és Gotléb István nyertes dolgozatain kívül több dícséretre érdemes dolgozat is találtatott, a mire már régebb idő óta nem volt példa.

A Társulat az elmúlt esztendőben tíz rendes előadó ülést tartott. Ez üléseken kilencz, illetve nyolcz előadó, kilencz mathematikai és ugyanannyi physikai tárgyról értekezett. Folyóiratunk XV. évfolyama is megjelent, még pedig 25·5 ívnyi terjedelemben. Búzgó pénztárnokunk bíztatása, hogy az eredetileg köteles ívszámot kevéssel megtoldhatjuk, ezen kissé megnövekedett terjedelem oka. A kötetben tizenhárom szerző tizennyolcz mathematikai, nyolcz szerző tíz physikai eredeti dolgozata van. Míg azonban eredeti dolgozatokban, kitűzött és megoldott feladatokban nincs hiány, addig a laboratórium rovata ez évben el van hanyagolva. Talán éppen ezen a téren találhatnók meg azt a tevékenységünket, a melylyel vidéki társainknak a legtöbb örömet és hasznot biztosíthatjuk.

Előadásaink és lapunk physikai részének tartalma nagyon tarka és a szorosan vett physikától nagyon is messze eltér. Ez természetes következménye annak, hogy kevés szakközlöny van rendelkezésünkre és hogy ennélfogva sok rokontudomány kér lapunkban helyet.

Tagtársaink száma az elmúlt év végén 398 volt, előfizetőink száma 84-re rúgott. Mindkét szám az elmúlt évekhez képest csekély esést tüntet fel, melynek oka egyrészt az, hogy nyugalomba vonuló tanárok nagyobb számban kiléptek, másrészt ellenben, hogy administrativ rendszabályok foganatosíttattak. A csökkenésben a halál gyászos munkáját ezúttal kevésbé látjuk. Tagtársaink közűl Ferenczy István és Kórodi Imre húnytak el az elmúlt esztendő folyamán.

Kegyeletes szívvel meg fogjuk őrizni emléküket.

Nagy hálával tartozunk a Magyar Tudományos Akadémiának, a melynek III. osztálya és az ennek kebelében működő Mathematikai és Természettudományi Bizottság ez évben is hathatósan támogatott. A közhiedelem ellenére az Akadémia nem gazdag intézet és a takarékosság szüksége nála is mutatkozik. Hálás köszönetünk nyílvánítása mellett fejezzük ki ama reményünket, hogy az Akadémia támogatására a jövőben is számolhatunk, megigérve, hogy arra minél méltóbbakká lenni igyekezünk.

Ugyancsak a Magyar Tudományos Akadémia segítségének köszönhetjük, hogy az év folyamán dr. Erményi Lajosnak «Petzval József élete és érdemei» czímű, 4·5 ív terjedelmű értekezését kiadhattuk és tagtársainknak lapunk mellékletéül díjtalanúl megküldhettük. Petzvalnak annyi érdeme van Társulatunk czímében megjelölt mindkét tudomány körül, hogy e mellékletünket bizonyára minden társunk egyformán köszönettel vette.

Tudományos életünknek egyik kimagasló momentuma volt az elmúlt évben tartott conferentia, melyet a geodéziai nemzetközi Szövetség ezúttal Budapestre hívott meg. Az elnökség szíves meghívására Társulatunknak is nyílt alkalma ez értekezleteken résztvenni, az értekezlet komoly tudományos munkálkodásából tanuságot meríteni.

Kedves emléket hagyott szívünkben e conferentia, mert a mit évek hosszú során át vágyva vártunk és a mit múlt évi titkári beszámolómban talán már rövid időn belül teljesedőnek mondottam, az mindnyájunk őszinte örömére teljesedésbe is ment. Ismét teljesedett öreg Bolyainknak egy óhaja: a nyugotról vett tudományos jótéteményekért cserébe mi is adhattunk.

Kérem a Tisztelt Közgyűlést, hogy jelentésemet, melyet számos szíves és fáradhatatlan munkatársunknak szóló köszönetünkkel rekesztek be, szíves tudomásul venni kegyeskedjék.

Budapest, 1907. április 20-án. *Kövesligethy Radó*

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1907-re és a péntárvizsgáló-bizottság jelentése.

Mélyen t. közgyűlés!

A kiosztott jelentésem szerint

összes bevételeink ...	9962 kor.	70 f.
összes kiadásaink pedig ...	6390 «	25 «
tettek ki és így ...	3572 kor.	45 f.

készpénz, illetőleg takarékpénztári betét szolgál födözetül tartozásainkra. U. i. mivel folyóiratunk utolsó számai a mult év folyamán nem jelenhettek meg, azok költségeit a mult évben nem is lehetett kiegyenlíteni.

Nyomdai tartozásunk ...	1969 kor.	57 f.
ki nem fizetett írói tiszteletdíjak pedig	780 «	— «
tesznek ki, azaz összes adósságunk ...	2749 kor.	57 f.

tesz ki az 1906. év végén.

A m. tud. Akadémia a mult évben a szokásos 2000 kor. helyett 2600 kor. segélyben részesítette Társulatunkat. Ugyanis Erményi «Petzval élete és érdemei» cz. füzet kiadási költségeire 600 koronát adott. E füzetet t. tagtársaim a m. é. májusi füzethez mellékelve kapták meg.

A m. tud. Akadémiának Társulatunk fönnállása óta nyujtott állandó és azonkívül is időnkint külön adományozott segélyeért hálás szívvel mondok köszönetet.

Folyóiratunk nyomdai költségeire a mult évi közgyűlés 3000 koronát szavazott meg.

Kifizettünk	1387 kor.	77 f.
még kifizetendő	1969 «	57 «
a mi összesen	3357 kor.	34 f,

azaz itt 357 kor. 34 f túllépés volna.

Az írói tiszteletdíjakra a közgyűlés 2400 koronát szavazott meg.

Tényleges kiadásunk	1960 kor. volt,
ehhez járul még	780 «
mely ez évben lesz kifizetendő ; összesen tehát	2740 kor.,

a mi 340 kor. túllépés volna. E kettő részben való födözetéül szolgál a m. tud. Akadémia már említett 600 kor. nagylelkű adománya.

Az expeditio és irodai költségek 81 K 51 f-rel többet tettek ki, mint a mennyi e czímen rendelkezésre állott. Ennek oka részben a nyomtatványárúk megdrágulása, részben a tagdíjak intenzivebb behajtása következtében fölmerülő költségtöbblet, részint pedig az a körülmény, hogy a tanintézetek folyóiratunkat mindinkább a könyvkereskedőknél rendelik meg s így az azoknak nyújtott százalék e rovat terhére esik.

Vegyesek czímén 114 K 62 f-rel adtunk ki többet, de viszont 592 K 69 f-t vettünk be előirányzat nélkül.

A f. é. tagdíjakból 181 K, a hátralékokból 377 K, kamatokból 34 K 99 f, az előfizetési díjakból pedig 150 K-val több folyt be. A hirdetési díjakból hiányzó 240 K-t remélhetőleg ez év folyamán fogjuk megkapni.

Bevételeinket, kiadásainkat, követeléseinket és tartozásainkat egybevetve megállapíthatjuk, hogy mérlegünk a multhoz képest ismét 251 K 71 f-rel javult.

Úgy tudom, hogy ezen évi megtakarításokat a Társulat nem kivánja tőkésíteni, azért indítványozom, hogy az 1907. évi költségvetésbe a folyóirat nyomdai költségeire ne 3000, hanem 3400 K-t, az írói tiszteletdíjakra 2400 K helyett 2600 K-t, expeditio és irodai költségekre 900 K helyett 1000 K-t vegyünk fel. Továbbá f. é. tagdíjak czímén ne 2200 K, hanem 2400 K, hátralékok czímén 200 K helyett 300 K, előfizetési díjak czímén 700 K helyett 750 K-t állítsunk a költségvetésbe.

Kérem a m. t. közgyűlést ezen jelentésemet tudomásul venni, a multra nézve fölmentést, a jövőre pedig fölhatalmazást adni kegyeskedjék.

A közgyűlés e jelentést helyeslőleg tudomásul veszi, az alábbi számadás és költségelőirányzatot tételenként való mérlegelése és a pénztárvizsgáló-bizottságnak felolvasott jelentése alapján a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és 1907-iki költségelőirányzatát elfogadja. Egyben köszönetét fejezi ki a pénztárnoknak a Társulat felvirágoztatása körüli sikeres működéseért.

1906. évi

BEVÉTEL	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
1905. évi zárszámadási maradvány	2287	02	2287	02
Alapitói dij	—	—	—	—
Folyó és köv. évi tagdijak	2200	—	2381	—
Hátralékos tagdijak	150	—	577	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2600	—
Hirdetési dijak	340	—	100	—
Kamatok	540	—	574	99
Előfizetési dijak	700	—	850	—
Vegyesek			592	69
	8217	02	9962	70

Vagyon-

VAGYON	1905. év végén		1906. év végén	
Forgó tőke:	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Készpénz	420	37	707	46
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1430	85	1890	19
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	387	—	926	—
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	800	—	800	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2262	—	2262	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Tagdijhátralékok	250	—	250	—
Föl nem vett hirdetési dij	200	—	280	—
	16007	02	17372	45

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

A választmány megbizásából: *Kövesliget*

Rátz László s. k. *Beke Manó dr.* s. k. ügy

1907. évi költség-

BEVÉTEL	1906. évi előirányzat		1907. évi előirányzat	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Zárszámadási maradvány	2287	02	3572	45
Folyó évi tagdijak	2200	—	2400	—
Hátralékos tagdijak	200	—	300	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	340	—	380	—
Kamatok	540	—	550	—
Előfizetési dijak	700	—	750	—
	8267	02	9952	45

:árszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek a mult évre	1232	85	1232	85
a folyó évre	3000	—	1387	77
Irói tiszteletdijak a mult évre	403	—	403	—
a folyó évre	2400	—	1960	—
Expeditió- és irodai költségek	900	—	981	51
Középiskolai mathemat. tanulóverseny	160	—	160	50
Vegyesek	150	—	264	62
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			707	46
b) takarékp. betétben			2864	99
	8245	85	9962	70

nérleg.

TEHER	1905. év végén Kor.	fill.	1906. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	1232	85	1969	57
Irói tiszteletdijak	403	—	780	—
Tiszta vagyon	14371	17	14622	88
	16007	02	17372	45

:udapesten, 1907 április 16-án.

dó dr. s. k.   A közgyülés megbizásából:

:r.   *Bogyó Samu* s. k.   *Balog Mór* s. k.

:lőirányzat.

KIADÁS	1906. évi előirányzat Kor.	fill.	1907. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai tartozás	1232	85	1969	57
Folyó évi nyomdai költségek	3000	—	3400	—
Irói tiszteletdijak	403	—	780	—
	2400	—	2600	—
Expeditió- és irodai költségek	900	—	1000	—
Középisk. math. tanulóverseny	160	—	160	—
Vegyesekre	150	—	42	88
	8245	85	9952	45

Feichtinger Győző
pénztárnok.

5. Választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a választmányból Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László, Tőtössy Béla kilépnek.

A választás idejére elnök felfüggeszti az ülést és Szabó József elnöklete alatt Goldziher Károly és Kőnig Dénes tagtársakból álló szavazatszedő bizottságot küld ki.

A választás megejtetvén, a bizottsági elnök jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 33 szavazatból Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László és Tőtössy Béla egyenként 32 szavazatot nyert. Az eddigi választmány tehát teljességében megmaradt.

6. Indítványok.

Indítvány nem adatik be, a napirend utolsó pontja magától elesik.

*

Elnök végre a pénztár vizsgálására a közgyűlés nevében ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtársakat kéri fel és ezzel a közgyűlés hivatalos része elintézést nyervén, a közgyűlést berekeszti.

*

A közgyűléssel kapcsolatosan rendes ülés volt, melyben Réthy Mór az anyagi pont egyensulyáról értekezett ellenálló közegben, és Klupathy Jenő nehány ujabb eszközt és kisérletet mutatott be.

KITÜZÖTT FELADAT.

41. *Ismeretes, hogy* $\alpha=\frac{p}{q}$ *(hol p és q két oly raczionális egész szám, melyeknek nincs valódi közös osztójuk) csak akkor tehet eleget az*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}+\cdots + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, ha a_0 *osztható q-val és* a^n *osztható p-vel.*

Bebizonyítandó, hogy ha $\alpha=\frac{p}{q}$ *az adott egyenletnek valóban gyöke, akkor*

$$A_0=a_0,\quad A_1=A_0\alpha+a_1,\quad A_2=A_1\alpha+a_2,\ldots A^{n-1}=A^{n-2}\alpha+a^{n-1}$$

rendre a q-val osztható egész számok.

(KÜRSCHÁK.)

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1907. évi nov. hó 1-től decz. hó 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1904. évre: Bujk Béla 6 kor. ... 6 kor.

1905. évre: Dózsa Jakab 6 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen ... 12 kor.

1906. évre: Aliquander Lajos 6 kor., Babiak Nándor 6 kor., Hauser Ignácz 6 kor., Kármán Ferencz 10 kor., Kemény Ferencz dr. 10 kor., Kovács János dr. 10 kor., Kúthy József dr. 6 kor., Payer Jenő 10 kor. Összesen ... 64 kor

1907. évre: Ábrahám István 10 kor., Andor Tivadar 10 kor., Angheben Albin 6 kor., Asbóth Emil 10 kor., Balog Mór 10 kor., Beck Károly 6 kor., Beke Manó dr. 10 kor., Benko Imre 6 kor., Bihary Ferencz 6 kor., Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Bodola László 6 kor., Borossay Dávid 6 kor., Bruckner Károly 6 kor., Butorka Száva dr. 6 kor., Csajkás Mihály 6 kor., Csemez József 10 kor., Csibortits Imre 6 kor., K. Danch Ferencz 6 kor., Demeczky Mihály dr. 10 kor., Edelmann Sebő dr. 6 kor., Egly Sándor 6 kor., Elekes Pál 6 kor., Ellend József 6 kor., Emszt Kálmán dr. 10 kor., Erdődy Imre 10 kor., Fabinyi Rezső dr. 6 kor., Feldmann Gyula 10 kor., Ferenczy József 6 kor., Fejes Zsigmond 6 kor., Gerecz Lajos 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Groo Vilmos 6 kor., Hajnal Márton 10 kor., Hassák Vidor 6 kor., Hatvani Ede 6 kor., Hilbert Stefánia 10 kor., Hang Dániel 6 kor., Hlatky Miklós 6 kor., Hogyor József 6 kor., Homor István 6 kor., Hoór Mór dr. 10 kor., Horváth József dr. 6 kor., Horváth Kálmán 6 kor., Hubatsek Alajos 10 kor., Janell József 6 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Kalecsinszky Sándor 10 kor., Kisgyörgy János 6 kor., Klúg Lipót dr. 6 kor., Konkoly-Thege Miklós ifj. 6 kor., Korbuly Emil 6 kor., Kovács István 6 kor., Lakner József 6 kor., Lévay Ede dr. 10 kor., Ratkovszky Pál 6 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Lutter János 10 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Margittai Antal 6 kor., Mátray Rudolf 6 kor., Mialovich

Mór 10 kor., Nagy Balázs 6 kor., Obláth Richard 6 kor., Perényi Candid 6 kor., Petry Gyula 6 kor., Pfeifer Péter dr. 6 kor., Plischka Norbert 6 kor., Privorszky Alajos 10 kor., Raffmann Jákó dr. 10 kor., Rátz László 10 kor., Renner János 6 kor., Rucsinszky Lajos 10 kor., Skopal István 10 kor., Steécz György dr. 6 kor., Steiner Miklós 6 kor., Strasser Nándor 6 kor., Streitmann András 6 kor., Strompf László 6 kor., Suták József dr. 10 kor., Süss Nándor 10 kor., Szabó Péter dr. 10 kor., Szavkay Ede 10 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szontágh Gusztáv 6 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Tass Antal 6 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor., Tőtössy Béla 10 kor., Vater József 10 kor., Wagner Alajos dr. 10 kor., Winter József 10 kor., Zettner Ede 10 kor. Összesen ... 692 kor.

1908. évre: Pallos Béla Kajetán 6 kor., Pap János 10 kor., Riegl Sándor 6 kor. Összesen ... 22 kor.

1906. évre: Aradi áll. főreáliskola ... 10 kor.

1907. évre: Budapesti V. k. áll. főgymn. 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főgymnasium 10 kor., Budapesti Tanárképző int. gyakorló főgymn. 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Érsekujvári közs. kath. főgymn. 10 kor., Gyulai róm. kath. főgymn. 10 kor., Hajdú-Böszörményi ev. ref. főgymn. 10 kor., Kolozsvári kegy. rendi Kalazantinum 10 kor., Miskolczi ev. ref. főgymn. 10 kor., Salgótarjáni polg. iskola 10 kor., Székely-udvarhelyi r. kath. főgymnasium 10 kor., Székelyudvarhelyi ref. főgymn. 6 kor. Összesen 116 kor.

1908. évre: Budapesti Premontrei tanárképző «Norbertinum» 10 kor., Budapesti cziszt. r. tanárképző 10 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor. Összesen ... 30 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

Összesen befolyt:

		jan. 1-től:
Hátralékokból ...	82 kor.	348 kor.
F. és köv. évi tagsági díjakból ...	714 «	2155 «
Előfizetési díjakból ...	156 «	788 «

Kelt Budapesten, 1907 nov. 31-én.

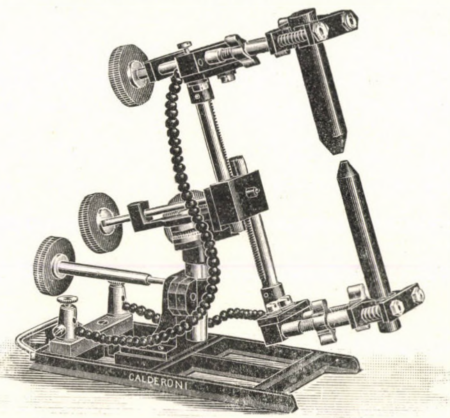
Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)

Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **23.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5–30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

	200	240	280	300	320	360	400	480 cm. négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

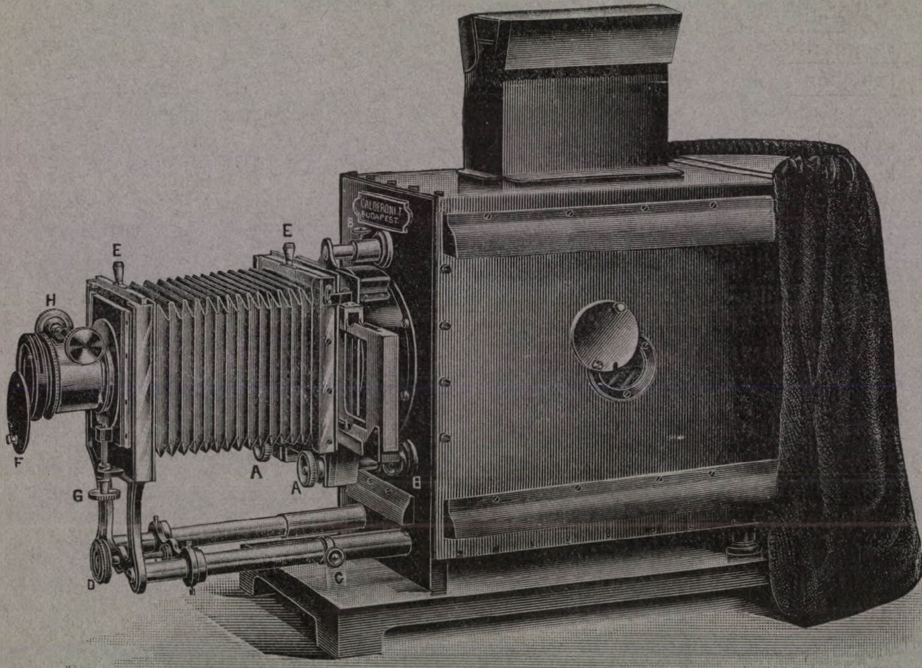
Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* **K 260.—**

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHATODIK ÉVFOLYAM

VIII. FÜZET 1907 DECEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1907.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhatodik társulati év 1907 január 1-jén kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czimére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czimére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

ANYAGI PONT LABILITÁSÁRÓL ELLENÁLLÓ KÖZEGBEN.

I. Előbbi közleményemben megmutattam, hogy az anyagi pont azon a G helyen, a hol a szabad erők potencziálja minimum és a hol e tulajdonság TAYLOR-sorának *másodrendű* tagjából felismerhető, labilis egyensúlyban van akkor, a midőn közegben mozoghat, melynek ellenállása az érintő és a görbületsugár irányaiba bontva a komponensek megfelelnek a következő követelményeknek:

1. a tangencziális ellenállás $f(v)$ zérus, a midőn $v=0$, és a midőn a sebesség zérustól kezdve elég kicsiny értékig nő, akkor ez ellenállás vagy monoton nő, vagy pedig úgy változik, hogy $\frac{f(v)}{v}$ véges határon alul marad; az elsőre példa $f(v)=v^n$, ha $0<n<1$; a másodikra példa ugyanezen függvényalak, ha $n\geqq 1$;

2. a görbületi középpontból a pálya felé positivnak vett normális ellenállás nagysága pedig $\lambda\frac{v^2}{\rho}$-val jelöltetvén, hol ρ a görbületi sugár, a λ egy függvény, a mely az

$$1+\lambda>0$$

egyenlőtlenségen kívül semmi más feltételnek nem tartozik eleget tenni.

Nyilt kérdés maradt, hogy a normális ellenállásra vonatkozó követelmény miképen alakul akkor, a midőn a potencziál minimum volta a TAYLOR-sorának *kettőnél* magasabbrendű tagjaiból ismerhető fel? Mert csak annyit mutattam volt meg, hogy ekkor vannak labilitási esetek, a normális ellenállásra vonatkozó követelmény változatlansága mellett is. Azóta észrevettem, hogy ilyen általánosabb potencziál esetén is bizonyos az egyensúly labilis volta, mihelyt föltehetem, hogy a normális ellenállás kicsinyendő sebességgel egy a potencziálmeghatározta állandón alulra sülyed. Ezt kivánom megmutatni.

II. Az előbbi közleményem (7) egyenletrendszeréből indulok ki, mely az anyagi pont mozgásegyenleteit tartalmazza és így is írható:

$$(1+\lambda)x'' = \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda\frac{x'}{v}\frac{dv}{dt} - \frac{f(v)}{v}x',$$
$$(1+\lambda)y'' = \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda\frac{y'}{v}\frac{dv}{dt} - \frac{f(v)}{v}y', \tag{1}$$
$$(1+\lambda)z'' = \frac{\partial U}{\partial z} + \lambda\frac{z'}{v}\frac{dv}{dt} - \frac{f(v)}{v}z'.$$

Jelöltessék

$$p_i \equiv \alpha_i x'' + \beta_i y'' + \gamma_i z'',$$
$$v_i \equiv \alpha_i x' + \beta_i y' + \gamma_i z', \tag{2}$$
$$P_i \equiv \alpha_i\frac{\partial U}{\partial x} + \beta_i\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma_i\frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

Akkor az (1) egyenletrendszerből folyólag

$$(1+\lambda)p_i = P_i + \lambda\frac{v_i}{v}\frac{dv}{dt} - \frac{f(v)}{v}v_i. \tag{3}$$

Legyen először

a) $\alpha_i = x', \quad \beta_i = y', \quad \gamma_i = z'$;

másodszor legyen, n-nel jelölvén a görbületi középpont felé mutató irányt

b) $\alpha_i = \cos(n, x), \quad \beta_i = \cos(n, y), \quad \gamma_i = \cos(n, z)$;

harmadszor legyen

c) $\alpha_i = x, \quad \beta_i = y, \quad \gamma_i = z.$

Az első esetben

$$a) \qquad p_i \equiv v\frac{dv}{dt}, \quad v_i \equiv v^2, \quad P_i \equiv \frac{dU}{dt};$$

a második esetben

$$b) \qquad p_i \equiv \frac{v^2}{\rho}, \quad v_i \equiv 0, \quad P_i \equiv P_n,$$

hol ρ a görbületi sugár, a P_n pedig a szabad erő komponense a görbületi sugár irányában; a harmadik esetben ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ jelölés mellett)

$$c) \qquad v_i \equiv rr', \quad p_i \equiv rr'' + r'^2 - v^2, \quad P_i \equiv r\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Az *a)*, *b)*, *c)* alattiaknak megfelelőleg a (3) egyenletből a következő három egyenlet fakad, a melyek együtt az (1) rendszerrel egyenértékűek:

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dt} - vf(v), \tag{3'}$$

$$(1+\lambda)\frac{v^2}{\rho} = P_n, \tag{3''}$$

$$(1+\lambda)r'' = \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda\frac{r'}{v}\frac{dv}{dt} - f(v)\frac{r'}{v} + \frac{1+\lambda}{r}(v^2 - r'^2). \tag{3'''}$$

Ez egyenletek elseje szerint az eleven erő változtatására a szabad erőn kívül csak a tangencziális ellenállásnak van befolyása. A (3″) egyenlet szerint csak akkor egyenlő a normálisba eső gyorsuláskomponens a szabad erő ez iránybeli komponensével, ha $\lambda = 0$, míg máskülönben

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{1+\lambda}P_n;$$

e szerint a $\lambda\frac{v^2}{\rho}$ megadja a görbületi középpontból a pálya felé positivnak számított normális ellenállást, a mely véges P_n esetén végnélkül fogyó v-vel csak úgy közeledhetik a zérushoz, ha a λ zérushoz közeledik. A λ szorzót a normális ellenállás *hatástényezőjének* nevezem. A (3''') egyenletet végül a (3') felhasználásával így írom:

$$r'' = \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \frac{r'}{v^2}\frac{dU}{dt}\right) - \frac{f(v)}{v} r' + \frac{1}{r}(v^2 - r'^2). \quad (4)$$

Az $\frac{r'}{v}$ legfölebb $=1$ és az $\frac{1}{v}\frac{dU}{dt}$ a $\frac{\partial U}{\partial r}$-rel egyenlő rendű lévén, nyilvánvaló, hogy e (4) egyenlet végnélkül fogyó λ-val az

$$r'' = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{f(v)}{v} r' + \frac{v^2 - r'^2}{r}$$

egyenletbe megy át, mely azonos az első közleményem (2) egyenletével, a melyből a labilitásra következtettünk volt. Ez azonban csak előre várható dolog, melyből további következtetés nem vonható. De könnyen megmutatom, hogy kicsiny kezdősebesség esetén az

$$A \equiv \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \frac{r'}{v^2}\frac{dU}{dt} \quad (5)$$

a G pont körül fekvő elég kicsiny T tartományon belül positív marad, mihelyt felteszem, hogy a normális ellenállás hatástényezője kicsinyedő sebességgel egy a potencziál-meghatározta az egységnél kisebb állandón alulra sülyed.

III. Különböztessünk meg három esetet:

1. Legyen

$$U = F(r).$$

Ekkor

$$A \equiv \left(1 + \lambda \frac{r'^2}{v^2}\right) \frac{\partial U}{\partial r} \quad (5')$$

lévén, a T tartományt csak úgy kell megszabnom, hogy benne a $\frac{\partial U}{\partial r}$ ne legyen negativ, (a mi az U minimum voltánál fogva lehetséges) és hogy benne a λ hatástényező ne lehessen $= -1$. Ha a kezdősebesség, a melylyel az anyagi pontot megindítom elég kicsiny, akkor az utóbbi a normális ellenállásról való feltevéssel megegyez.

2. Legyenek r, ϑ, ω polárkoordináták és

$$U = F(r, \vartheta).$$

Ekkor

$$1 = \varepsilon + \eta$$

téve, hol ε és η positivok, írom

$$A \equiv \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{v^2} A_1, \tag{5''}$$

hol

$$A_1 \equiv \eta v^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda r' \left(\frac{\partial U}{\partial r} r' + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vartheta' \right) \equiv$$

$$\equiv (\eta v^2 + \lambda r'^2) \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \frac{\partial U}{\partial \vartheta} r' \vartheta', \tag{6}$$

azaz

$$A_1 \equiv (\eta + \lambda) r'^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \frac{\partial U}{\partial \vartheta} r' \vartheta' + \eta \frac{\partial U}{\partial r} r^2 \vartheta'^2 + \eta \frac{\partial U}{\partial r} r^2 \sin^2 \vartheta \omega'^2.$$

Ezek szerint az

$$A \gtreqless \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r},$$

mihelyt a T tartományt úgy szabom meg, hogy benne e három mennyiség közül

$$\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \eta + \lambda, \quad 4\eta(\eta + \lambda) r^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right)^2$$

egyik se lehessen negativvé. Csak az utóbbi követelmény vizsgálandó meg közelebb, mert kérdés, hogy a λ hatástényezőre nézve nem ír-e elő olyast, a mi nem teljesíthető, ha pl. a λ csakis a sebesség függvénye, a koordinatáké pedig nem?

Az A_1-re vonatkozó kérdésnél az U Taylor-sorának csak legalacsonyabbrendű tagja U_{2n} mérvadó. Azért csak a

$$4\eta(\eta + \lambda) r^2 \left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial r} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta} \right)^2 \geqq 0 \tag{7}$$

követelés vizsgálandó meg. Miután

$$U_{2n} \equiv r^{2n} f_1(\vartheta),$$

hol $f_1(\vartheta)$ a $\sin\vartheta$ és $\cos\vartheta$ egész függvénye, tehát

$$\frac{\partial U_{2n}}{\partial r} \equiv 2nr^{2n-1}f_1(\vartheta),$$

$$\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta} \equiv r^{2n}f_1'(\vartheta)$$

és

$$\left(\frac{\frac{\partial U_{2n}}{\partial\vartheta}}{r\frac{\partial U_{2n}}{\partial r}}\right)^2 \equiv \left(\frac{f_1'\vartheta}{2nf_1(\vartheta)}\right)^2. \tag{8}$$

Az U_{2n} nem negativ mennyiség csak $r=0$ helyen lehetvén $=0$, az $f_1(\vartheta)$ bizonyára positiv. A (8) jobb oldalán álló törtnek a számlálója nem lehetvén ∞ és a nevezője nem lehetvén $=0$, mint folytonos függvénynek kell felső határának lennie: legyen ez $=\frac{2}{M}\cdot$ Akkor megállapitom λ-át úgy, hogy

$$2(\eta+\lambda)\eta M-\lambda^2=0 \tag{7'}$$

legyen; így a (7) követelésnek mindenesetre megfeleltem. E szerint a λ úgy állapitandó meg, hogy

$$\frac{\lambda}{\eta}=M\pm\sqrt{M^2+2M}$$

legyen. Ez annyit jelent, hogy positiv λ esetén, az értékének kisebbnek kell lennie, mint

$$M+\sqrt{M^2+2M}$$

és negativ λ esetén az absolut értékének kisebbnek, mint

$$\sqrt{M^2+2M}-M<1.$$

A T tartományt tehát úgy kell megszabnom, hogy benne a sebesség gyarapodása még akkor se érhetné el a λ hatástényező megengedett értékéhez tartozó sebességet, ha a közeg ellenállás nélküli volna; és az anyagi pontnak csak olyan kicsiny kezdősebességet szabad adnom, hogy a gyarapodással együtt se léphetné túl a megengedett határt.

3. Legyen végül

$$U = F(r, \vartheta, \omega).$$

Akkor az (5″) helyébe lép

$$A \equiv \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{v^2} B, \tag{5‴}$$

hol

$$B \equiv A_1 + \lambda r' \frac{\partial U}{\partial \omega} \omega'.$$

A B nem negativ mindenesetre, ha a

$$\begin{vmatrix} 2(\eta+\lambda)\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r} & \lambda\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta} & \lambda\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \omega} \\ \lambda\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta} & 2\eta\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r} & 0 \\ \lambda\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \omega} & 0 & 2\eta\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r} r^2 \sin^2\vartheta \end{vmatrix}$$

determinans, valamint annak főminorai positivok, azaz, ha a

$$\frac{\partial U_{2n}}{\partial r} \quad \text{és} \quad \eta+\lambda$$

mennyiségeken kívül még

$$2(\eta+\lambda)\eta M - \lambda^2$$

is nem negativ, a hol M nem egészen ugyanazt jelenti, mint a (7′) egyenletben, hanem jelenti azt az értéket, a melynél a

$$\frac{2r^2\left(\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta}\right)^2}, \quad \frac{2r^2\left(\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r}\right)^2 \sin^2\vartheta}{\left(\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \omega}\right)^2}, \quad \frac{2r^2\left(\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r}\right)^2 \sin^2\vartheta}{\left(\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta}\right)^2 \sin^2\vartheta}$$

mennyiségek értékkészletében kisebb nincsen. Hogy ilyen M szükségképen létezik, arról itt épúgy győződhetni meg, mint előbb.

E szerint a követelmények most is ugyanazok lévén, mint az előbbi (2) esetben, kimondhatjuk, hogy létezik olyan, a G pontot tartalmazó, T tartomány, a melyben a (3‴)-ból folyólag

$$r'' = P - \frac{f(v)}{v} r', \tag{9}$$

hol a P nem negativ mennyiség csakis a G pontban lehet zérus. Ez okból e (9) egyenletből ugyanazok a következtetések vonhatók, mint az első közleményembeli (2) egyenletből. Kimondhatom így FEJÉR tételének általánosításakép a következő tételt:

Ha az U potencziálnak a G helyen olyan izolált minimuma van, a mely a TAYLOR-*sorának legalacsonyabb rendű tagjaiból álló U_{2n}-ből ismerhető fel, (hol n bármekkora lehet), akkor az anyagi pont a G helyen labilis egyensúlyi helyzetben van, hacsak a közegellenállás a pálya görbületsugarába eső komponensének hatástényezője a sebesség fogyásával egy bizonyos, (általánosan szólva a potencziál állandóival meghatározott), értéken alulra lefogy, míg a tangencziális komponense $f(v)$ olyan, hogy $\frac{f(v)}{v}$ kisebbedő és eléggé kicsiny v esetén vagy véges határ alatt marad, vagy pedig monoton nő, és a mellett* $f(0) = 0$.

Réthy Mór.

A TÖBBMÉRETŰ TÉR
FORGÁSAINAK ÉS VÉGES FORGÁSCSOPORTJAINAK ANALYTIKUS TÁRGYALÁSA.

(Második közlemény.)

V. A simplex és csoportja.

A minden R_n-ben létező három szabályos test közül az ú. n. *n-méretű (szabályos[1]) simplex*, S_n némi tekintetben a legegyszerűbb. Ezt, *mint oly $n+1$ pontból álló pontrendszert definiáljuk, melyek közül bármely kettőnek távolsága ugyanaz.*

A következőkben az

$$m_n^2=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n},\quad r_n^2=\frac{1}{2}\frac{n}{n+1},\quad \rho_n=m_n-r_n$$

jelöléseket fogjuk használni, hol az m_n, r_n és ρ_n számokat az «egységélű» S_n magasságának, köréje írt gömb sugarának, illetve beléje írt gömb sugarának nevezzük. Ezeket az elnevezéseket $n=3$ esetéről veszszük át.

Kimutatjuk most már, hogy létezik oly S_n, melynek «éle» (két csúcs távolsága): 1, míg mind az $n+1$ csúcs O-tól való távolsága: r_n, feltéve, hogy egy megfelelő S_{n-1} létezik. Minthogy $n=2$, 3 esetében egy O körüli egységélű szabályos háromszög, illetve egy O körüli egységélű szabályos tetraéder követelményeinket kielégíti, azért ezzel az S_n existencziája minden n-re ki lesz mutatva.

---

[1] E szót ezentúl elhagyjuk.

A létezőnek feltételezett egységélű S_{n-1} csúcsai legyenek

$$Q_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}) \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

úgy, hogy

$$\overline{Q_iQ_k} = 1 \quad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

és

$$\overline{OQ_k}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 = r_{n-1}^2.$$

Az S_n-nek $n+1$ csúcspontját most már így definiáljuk:

$$P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}, -\rho_n), \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

$$P_{n+1} = (0, 0, \ldots, 0, r_n)$$

és kimutatjuk, hogy ez az $n+1$ pont megfelel követelményeinknek. Két P_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ távolsága egyenlő a megfelelő két Q_k távolságával és így: 1; épígy:

$$\overline{P_kP_{n+1}}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 + (r_n+\rho_n)^2 = r_{n-1}^2 + m_n^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} = 1.$$

A mi pedig az O-tól való távolságot illeti:

$$\overline{OP_k}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 + \rho_n^2 = r_{n-1}^2 + \rho_n^2 = \frac{1}{2}\,\frac{n}{n+1} = r_n^2.$$

Végül nyilvánvalóan:

$$\overline{OP_{n+1}} = r_n.$$

Ezzel az S_n existencziája tetszőleges n-re be van bizonyítva.

Ha egyméretű egységélű simplexül az $\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2}$ pontokat választjuk, akkor a részletezett eljárás egy teljesen meghatározott S_n-hez, mondjuk: S_n^0-hoz vezet. Ennek a speciális egységélű simplexnek, mint könnyen meggyőződhetünk, megvan ez a két tulajdonsága:

a) csúcspontjai nem feküsznek egy R_{n-1}-ben;

b) k számú csúcspontja sohasem fekszik O-val egy R_{k-1}-ben.

E két tulajdonságot most már kimutathatjuk minden simplexre. Legyen t. i. S_n egy tetszőleges egységélű simplex; akkor congruens S_n^0-val és így a IV. fejezet VII. tétele szerint egy M mozgás S_n^0-t átviszi S_n-be. Ha e mozgás O-t O'-be viszi, akkor O' az S_n minden csúcsából egyenlő távol van és így középpontja. Tehát:

I. *Minden simplexnek*[1] *van középpontja*

és az I. fejezet V. tétele szerint a tetszőleges S_n-nek is megvan az *a)* és *b)* tulajdonsága:

II. *A simplex csúcspontjai sohasem feküsznek egy* R_{n-1}*-ben.*

III. *O középpontú simplex k csúcspontja soha sincs O-val egy* R_{k-1}*-ben.*

A következőkben azokat a valódi és nem valódi forgásokat akarjuk megvizsgálni, melyek az O középpontú S_n-et, azaz $n+1$ csúcspontját önmagukba viszik át. Ezeket *simplexforgás*oknak is nevezzük; együtt a *teljes simplexcsoport*ot alkotják. A valódi simplexforgások összességét pedig, (melyek természetesen szintén csoportot alkotnak) *valódi simplexcsoport*nak fogjuk nevezni.

Bármily permutácziója is $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ az $(1, 2, \ldots, n+1)$-nek, az $(O, P_1, P_2, \ldots, P_{n+1})$ és $(O, P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_{n+1}})$ pontrendszerek mindig congruensek, $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$-gyel jelölve az S_n $n+1$ csúcspontját és így a IV. fejezet III. tétele szerint van oly forgás — és ez egy simplexforgás — mely a P_k-kat a P_{i_k}-kba viszi át. Ily módon a csúcsok minden $(n+1)!$ permutácziójához tartozik egy simplexforgás. Kimutatjuk még, hogy mindegyikhez csak egy tartozik. Ha a fenti (k, i_k) permutáczióhoz két simplexforgás is tartoznék, azaz két oly simplexforgás volna, mely minden P_k-t P_{i_k}-ba visz, akkor legalább három oly simplexforgás léteznék, mely $(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})$-et $(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_{n-1}})$-be vinné, t. i. ez a két simplexforgás és

[1] Itt, mint a következő két tételnél, az «egységélű» természetesen elhagyható.

az, mely az $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_{n+1}, i_n)$ permutáczióhoz tartozik. Ez azonban lehetetlen: a IV. fejezet IV. tétele szerint csak egy valódi és VI. tétele szerint csak egy nem valódi s így összesen csak két ily forgás létezik. Bebizonyítottuk tehát, hogy az $n+1$ csúcs tetszőleges permutáczióját egy és csak egy simplexforgás szolgáltatja:

IV. *Az S_n teljes csoportja holoedrikusan isomorph*[1] $n+1$ *elem symmetrikus csoportjával és* $(n+1)!$ *forgást tartalmaz.*

A megelőzők szerint, ha $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ $n-1$ számú $n+2$-nél kisebb különböző szám, két simplexforgás létezik, mely P_1, $P_2, \dots, P_{n-1}$-et ily rendben $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n-1}}$-be viszi: az egyik P_n-et P_k-ba, P_{n+1}-et P_l-be, a másik P_n-et P_l és P_{n+1}-et P_k-ba (k és l jelenti az $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ közt nem szereplő két $n+2$-nél kisebb számot). Egyike e forgásoknak valódi, a másik nem. Az $(1, 2, \dots, n)$ elemekből alkotott minden $n-1$ elemből álló $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ ismétlés nélküli kombináczióhoz tehát egy és csak egy valódi simplexforgás tartozik. Minthogy továbbá minden forgáshoz tartozik egy ily kombináczió, azért a valódi simplexcsoport forgásainak a száma megegyezik e kombdocziók számával, mely a kombináczió elemeinek sorrendjét is tekintetbe véve

$$\binom{n+1}{n-1}(n-1)! = \tfrac{1}{2}(n+1)!$$

Ily módon a következő eredményhez jutottunk:

V. *Az S_n valódi csoportja* $\frac{1}{2}(n+1)!$ *forgást tartalmaz.*

Kimutatjuk még, hogy *a valódi forgásoknak a csúcsok páros permutácziói felelnek meg és viszont.*

Létezik t. i. oly forgás a valódi simplexcsoportban, mely a $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}$ pontokat rendre a $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n$ pontokba viszi át. E forgás P_{n+1}-et P_{n-1}-be viszi át, ha t. i. P_{n+1}-be vinné, akkor $n-1$ pont változatlan maradván, az identikus forgással volna dolgunk és P_{n-1} nem mehetne P_n-be

[1] Rövidség kedvéért a következőkben a «holoedrikus» szót elhagyjuk.

át. Végül tehát P_n a még egyedül hátralévő P_{n+1}-be megy át s a forgás a csúcsok

$$\begin{pmatrix} P_1 P_2 \dots P_{n-2} P_{n-1} P_n & P_{n+1} \\ P_1 P_2 \dots P_{n-2} P_n & P_{n+1} P_{n-1} \end{pmatrix} = (n-1,\ n,\ n+1)$$

permutácziójához tartozik. Épígy belátható, hogy mind a többi hármas cziklikus permutáczió is bent van a csoportban, tehát minden páros permutáczió is, minthogy ezek[1] hármas cziklusokból mindig összetehetők. Az utóbbiak száma is $\frac{1}{2}(n+1)!$ lévén, ezekkel a csoport ki van merítve. Ezzel bebizonyítottuk a kimondott tételt, mely így is kimondható:

VI. *Az S_n valódi csoportja isomorph $n+1$ elem alternáló permutácziós csoportjával.*

Minthogy pedig $n+1=4$ eset kivételével az alternáló csoport mindig egyszerű,[2] azért

VII. *A tetraédercsoport kivételével minden valódi simplexcsoport egyszerű.*

A tetraédercsoport azonban valóban tartalmaz egy invariáns alcsoportot, egy ú. n. «Vierergruppe»-t.[3] Minthogy az alternáló csoport mindig invariáns alcsoportja a symmetrikus csoportnak, azért végül:

VIII. *A teljes simplexcsoport sohasem egyszerű.*

VI. A simplexforgások tengelye.

A simplexcsúcspontok koordinátáinak képzésére a megelőző fejezetben adott rekurzív eljárás módot nyújt e koordináták explicit alakban való kiírására is. Minthogy azonban n-ről $n+1$-re

---

[1] L. pld. WEBER: Algebra, I, 497. l. (Első kiadás.)

[2] E tételt JORDAN bizonyította be először: Traité des Substitutions, (Paris, 1870), 66. l. Egyszerű, teljes indukczióval való bizonyítását adta BEKE (Math. és Phys. Lapok, VII. évf. 55. l. és Mathematische Annalen, 49. kötet, 581. l.); $n=5$-re, azaz az ikozaédercsoportra t. i. könnyen bebizonyítható, l. KLEIN «Ikosaeder»-jét, 18. l.

[3] KLEIN: «Ikosaeder», 14. l.

térve át, ezek kifejezésében mindig egy új négyzetgyökjel lép fel, azért ez a módszer a tárgyalást igen megnehezítené. Hiszen már a szabályos háromszög szögpontjainak a koordinátái sem adhatók meg *a síkban* négyzetgyökök nélkül,[1] míg *a térben* a

$$(g, 0, 0),\ (0, g, 0),\ (0, 0, g)$$

pontok igen egyszerűen adnak meg egy ily háromszöget. És ez így van általában is:

Az R_{n+1} következő $n+1$ pontja:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 \ = (\underset{1}{g}, \underset{2}{0}, \underset{3}{0}, \ldots, \underset{n+1}{0}) \\ Q_2 \ = (0, g, 0, \ldots, 0) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Q_{n+1} = (0, 0, 0, \ldots, g) \end{array}\right\} S_n^0$$

egy n-méretű simplexet (S_n^0) alkot.

Először is t. i. (ξ-kkel jelölvén az R_{n+1} koordinátáit) e pontok a

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+1} = g$$

egyenlettel megadott R_n-ben feküsznek és másodszor bármely kettőnek távolsága $g\sqrt{2}$. Ha tehát $g = \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor az egység-élű simplexszel van dolgunk. Világos továbbá, hogy az ezen R_n-ben fekvő

$$K = \left(\frac{g}{n+1},\ \frac{g}{n+1}, \ldots,\ \frac{g}{n+1}\right)$$

[1] Abból a feltevésből, hogy egy szabályos háromszög három szögpontjának mindkét koordinátája raczionális, bebizonyítható, hogy szögének tangense is raczionális, már pedig $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

Kivételesnek kell mondanunk azt, hogy a (szabályos) tetraédernek R_3-ban van oly elhelyezése, melynél a négy csúcspontnak mind a három koordinátája raczionális: az

$$(1, 1, 1),\quad (1, -1, -1),\quad (-1, 1, -1),\quad (-1, -1, 1)$$

pontok és épígy a

$$(-1, -1, -1),\quad (-1, 1, 1),\quad (1, -1, 1),\quad (1, 1, -1)$$

pontok is, (melyek együtt egy koczkának csúcspontjai) egy-egy tetraéder négy-négy csúcspontját adják.

pont a simplex középpontja, minthogy i-től függetlenül:

$$\overline{KQ_i}^2 = \left(\frac{n}{n+1} g\right)^2 + n\left(\frac{g}{n+1}\right)^2 = g^2 \frac{n}{n+1}.$$

Egységélű simplex, azaz $g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetében ez valóban

$$r_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}$$

-be megy át. Továbbá

$$\overline{OK} = g\sqrt{\frac{1}{n+1}}$$

és egységélű simplexnél:

$$\overline{OK} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

Legyen most már az R_n-ben egy O középpontú egységélű simplexnek, melyet röviden S_n-nel fogunk jelölni, $n+1$ csúcsa:

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}). \quad (i=1, 2, \ldots, n+1)$$

Ekkor R_{n+1}-nek $\left(\xi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\right.$ egyenlettel megadott R_n-jében fekvő$\left.\right)$ $n+1$ számú

$$Q_i' = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\right) \quad (i=1, 2, \ldots, n+1)$$

pontja ugyancsak egy ily simplexet, S_n'-t alkot, csakhogy középpontja

$$K' = \left(0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\right).$$

Rögtön belátható, hogy az R_{n+1} következő két pontrendszere:

$(O, K, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1})$[1] és $(O, K', Q_1', Q_2', \ldots, Q_n')$

congruens és így a IV. fejezet VII. tétele szerint van oly S forgás, mely az elsőt a másodikba viszi át.

---

[1] Itt $g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyettesítendő.

Az S tehát S_n^0-t S_n'-be viszi át. Ha tehát T^0 illetve T' oly forgása az R_{n+1}-nek, mely S_n^0-t illetve S_n'-t önmagába viszi át, akkor $ST'S^{-1}$ az S_n^0-nak, $S^{-1}T^0S$ pedig S_n'-nek forgása. Tehát az egyik csoportból a másik S-sel illetve S^{-1}-nel való transformálás által adódik ki.

Az S_n^0-t illetve S_n'-t önmagába átvivő R_{n+1} forgások csoportja tehát *isomorph* és a T^0 forgás tengelyének mérete megegyezik a megfelelő T' forgás tengelyének méretével, minthogy az S forgás az első tengelyt az utóbbiba viszi át.

Egyszerű vonatkozás hozható létre az S_n-et nem változtató R_n-forgások és az S_n'-t nem változtató R_{n+1}-forgások között is. Ha t. i.

$$x_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \qquad (T)$$

egy S_n forgás, akkor

$$T' \left\{ \begin{array}{l} \xi_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i \quad (k=1, 2, \ldots, n) \\ \xi_{n+1}' = \xi_{n+1} \end{array} \right.$$

S_n'-t hagyja változatlanul. Egyszersmind minden S_n'-forgás ily alakú, minthogy K'-t s így a ξ_{n+1}-tengely minden pontját változatlanul hagyja. Ily módon a T-k és T'-k csoportja között is isomorphismust állapitottunk meg. Ha most már d a T forgás tengelyének mérete, azaz az

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletek közt $n-d$ számú független, akkor a T' tengelyét megadó

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i, \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

$$\xi_{n+1} = \xi_{n+1}$$

egyenletek közt szintén $n-d$ számú független van, minthogy az utolsó egyenlet, mint identitás nem jön tekintetbe. A T' forgás tengelyének tehát

$$(n+1)-(n-d)=d+1$$

a mérete. A T'-k és T^0-k csoportja közt egyrészt és a T-k és T'-k csoportja közt másrészt megállapitott isomorphismus a (T) és (T^0) csoportok közt is isomorphismust állapit meg és pedig oly módon, hogy, ha T és T^0 két egymásnak megfelelő forgás, akkor

1. a T forgás tengelyének mérete 1-gyel kisebb a T^0 forgás tengelyének méreténél;

2. ha T a csúcspontok $(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_{n+1}})$ permutáczióját hozza létre, akkor T_0: $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_{n+1}}$ pontokba viszi át rendre a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ pontokat, azaz ugyanezt a permutácziót eredményezi.

Ez esetben T-nek és T^0-nak t. i. valóban ugyanaz a T' felel meg: az, mely a $(Q'_{i_1}, Q'_{i_2}, \ldots, Q'_{i_{n+1}})$ permutácziót hozza létre.

Oly R_{n+1}-forgás, mely a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ pontokat a $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots, Q_{i_{n+1}}$ pontokba viszi át, rendkívül egyszerűen megadható. Mint rögtön meggyőződhetünk, ezt megteszi a következő orthogonális substituczió:

$$\xi'_k = \xi_{i_k}. \quad (k=1, 2, \ldots, n+1) \tag{T}$$

Láttuk, hogy ezen forgás tengelyének mérete 1-gyel nagyobb azon simplexforgás tengelyének méreténél, mely a P_k-kat a P_{i_k}-kba viszi. A T forgás tengelyének egyenletrendszere:

$$\xi_k = \xi_{i_k}. \quad (k=1, 2, \ldots, n+1) \tag{I}$$

Ha *ezen egyenletek között t számú független van,* akkor a T forgás tengelyének mérete $n+1-t$ és így

A (k, i_k)-val jellemzett simplexforgás tengelyének mérete $n-t$.

A t meghatározása czéljából képzeljük a (k, i_k) permutácziót ciklikus permutácziókra felbontva:[1]

$$(k, i_k) = C_1 C_2 \ldots C_p .$$

Legyen $c_1, c_2, \ldots, c_p$ a $C_1, C_2, \ldots, C_p$ cziklusokban foglalt elemek száma úgy, hogy $c_1+\cdots+c_p=n+1$. Az (I) rendszer most már az ugyanazon cziklusban lévő ξ-k egyenlőségét fejezi ki. Különböző cziklusokra vonatkozó egyenletei (I)-nek — nem tartalmazván közös változót — természetesen függetlenek egymástól. Minthogy továbbá c számú ξ egyenlőségét $c-1$ egymástól független egyenlet fejezi ki, azért (I) egymástól független egyenleteinek a száma

$$t=(c_1-1)+(c_2-1)+\cdots+(c_p-1)=\Sigma c-p=n+1-p.$$

I. *A tengely mérete tehát:*

$$d=n-t=n-(n+1-p)=p-1$$

egygyel kisebb a csúcspontpermutáczió cziklusainak számánál.[2]

Továbbá innen:

II. *Két simplexforgás tengelyének mérete akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő két csúcspontpermutáczió ugyanannyi cziklusból van összetéve.*

Az előbbi meggondolásokból még közvetetlenül kitünik, hogy két S_n-forgás tengelye akkor és csak akkor egyezik meg, illetve akkor és csak akkor része az egyik a másiknak, ha a megfelelő két S_n^0-forgás tengelyei ily vonatkozásban vannak egymással.

Ennek tekintetbe vételével még a következő eredményekhez juthatunk.

III. *Két simplexforgás tengelye akkor és csak akkor ugyanaz,*

[1] Az egy elemből álló ciklusok is kiirandók.

[2] Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezen eredményünk összhangzatban van a III. fejezet eredményével: $n+1$ elem páros permutácziójánál: $n-2m+1$-, páratlannál: $n-2m$-alakú a cziklusok száma.

ha a megfelelő két permutáczióban ugyanazon elemek szerepelnek ugyanabban a cziklusban.

A tengely tehát nem változik, ha az egyes cziklusokban lévő elemeket c_i!-félekép permutáljuk. Minthogy azonban a c számú

$$(a_1, a_2, \ldots, a_c), (a_2, \ldots, a_c, a_1), \ldots, (a_c, a_1, \ldots, a_{c-1})$$

cziklikus permutáczió egymással megegyezik, azért csak

$$\frac{c_i!}{c_i} = (c_i-1)!$$

permutáczió jön tekintetbe:

IV. $\prod_{i=1}^{p}(c_i-1)!$ *számú oly simplexforgás van, melynek tengelye megegyezik a* $P=C_1C_2\ldots C_p$ *permutáczióhoz tartozó forgás tengelyével.*

Megyjegyzendő, hogy ugyanazon tengelylyel biró forgások nem alkotnak csoportot, kivéve ha az egész R_n a tengely; hiszen az identikus forgás csakis ez esetben van forgásaink közt. Ha két forgásnak tengelye ugyanaz, akkor összetevésükkel keletkező forgás változatlanul hagyja ugyan e tengely minden pontját, de hagyhat más pontokat is változatlanul, úgy, hogy tengelye többméretű lehet, mint az említett közös tengely. Már $n=3$ esetében adhatunk erre nem triviális példát. A cziklikus (1, 2, 3, 4) permutácziót önmagával téve össze, a két cziklusból álló (1, 3) (2, 4) permutáczióhoz jutunk. Míg tehát az előbbihez tartozó (nem valódi) forgásnak: pont, az utóbbihoz tartozónak: egyenes a tengelye.

A simplexcsoport alcsoportjaihoz jutunk azonban, ha azon simplexforgásokat foglaljuk össze, melyek valamely simplexforgás tengelyének pontjait nem változtatják. Válaszszuk ez utóbbinak az általános,

$$(k, i_k) = C_1 C_2 \ldots C_p$$

permutáczióhoz tartozó forgás tengelyét. Minhogy a megfelelő S_n^0 forgás tengelyét az

$$\xi_{i1} = \xi_{i2} = \cdots = \xi_{ic_i}$$
$$(i=1, 2, \ldots, p)$$

egyenletek adják meg,[1] hol

$$C_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ic_i}),$$
$$(i=1, 2, \ldots, p)$$

azért világos most már, hogy

V. *Egy simplexforgás akkor és csak akkor hagyja változatlanul e tengely pontjait, ha a megfelelő permutáczióban csak oly elemek (ξ-k) szerepelnek együtt egy cziklusban, melyek (k, i_k) valamely cziklusában is együtt fordulnak elő.*

E forgások számának meghatározása czéljából el kell dönteni, hogy c számú elem hányféleképen osztható cziklusokba, ismét nem tekintve különbözőnek két cziklust, ha cziklikus permutáczió által az egyik átmegy a másikba és így ugyanazt a permutácziót jelentik. A c számú elem minden permutácziójához egy ily cziklusokra bontás tartozván és viszont, világos, hogy e szám: $c!$[2]

VI. *A (P)-hez tartozó tengely pontjait tehát $\prod_{i=1}^{p} c_i!$ számú simplexforgás hagyja változatlanul,* a melyek, mint már említettük, természetesen csoportot alkotnak.

Általában azonban e csoport nem lesz, mint $n = 2$, 3 esetében cziklikus csoport, hanem több alkotóból keletkeztethető csupán. Ismervén e csoporthoz isomorph permutácziócsoportot, ezen alkotók felkeresése, stb. a permutácziócsoportok elméletére van visszavezetve. Ugyancsak ide van visszavezetve az a kérdés, hogy két forgás összetevésével keletkező forgás tengelye hogyan függ össze az összetett két forgás ten-

[1] Az ξ-ket a jelölés egyszerűsítése végett látjuk el két indexszel; minden két indexű ξ azonos egy ξ_i-vel $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ és csak akkor lesz $\xi_{ik} = \xi_{i'k'}$, ha $i=i'$, $k=k'$. A második index az első index indexeként tekinthető.

[2] $c=3$ esetében pld. e felbontások: (1) (2) (3), (12) (3), (13) (2), (23) (1), (123), (321).

gelyével. Egész általánosságban igen nehéz e kérdésre megfelelni, minthogy két cziklusokra bontott permutáczió szorzatának cziklusokra bontása (ezzel a dolog el volna intézve) általánosságban nem igen adható meg. Az egyes forgások periodusa is egyszerűen nyerhető úgy, hogy a megfelelő permutáczió periodusát keressük meg.

[A nélkül, hogy erre bővebben kiterjeszkednénk, megemlítjük, hogy e fejezet eredményeihez *homogén* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1})$ *koordinátták* bevezetésével[1] magában az R_n-ben maradva, eljuthatunk. Ezek t. i. úgy állapíthatók meg, hogy

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$$

legyen az S_n $n+1$ számú csúcsa. A simplexforgásokat ekkor

$$\xi'_k = \xi_{i_k} \quad (k=1, 2, \ldots, n+1)$$

adja, a mely substituczióról kimutatható, hogy neki rendes koordinátákban orthogonális substituczió felel meg. A tengely egyenletrendszere:[2]

$$\xi_k = \xi_{i_k} \quad (k=1, 2, \ldots, n+1)$$

lesz, stb. Látnivaló most már, hogy ez a módszer is eredményeinkhez vezet.]

---

[1] L. SCHOUTE II. köt. 142—153. l.

[2] Ez tulajdonképen $\xi_k = \varrho\xi_{i_k}$ alakban adódik ki, de bebizonyítható, hogy $\varrho^{n+1}=1$ és hogy, ha $\varrho=-1$ is lehetséges, $\xi_k = -\xi_{i_k}$-t csakis «*végtelenben fekvő pontok*» elégítik ki, melyek homogén koordináták bevezetésével maguktól fellépnek. Ezeket is megengedve a tengely (páratlan n-nél) nem is lineáris része mindig az R_n-nek, hanem esetleg két lineáris részből áll, melyek közül az egyik teljesen «a végtelenben van».

VII. Az oktaedroid és hexaedroid csoportja.

Hozzávéve az R_n következő n pontjához:

$$P'_1 = (g, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$P'_2 = (0, g, 0, \ldots, 0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$P'_n = (0, 0, 0, \ldots, g),$$

melyekről tudjuk, hogy egy S_{n-1}-et (mondjuk: S'_{n-1}-t) alkotnak az S''_{n-1}-t alkotó ugyancsak n számú

$$P''_1 = (-g, \ 0, \ 0, \ldots, \ 0)$$
$$P''_2 = (\ 0, -g, \ 0, \ldots, \ 0)$$
$$\cdots\cdots$$
$$P''_n = (\ 0, \ 0, \ 0, \ldots, -g)$$

pontot, a második szabályos test $2n$ csúcspontját nyerjük. E szabályos testet «*oktaedroid*»-nak fogjuk nevezni, minthogy $n=3$ esetére ez a szabályos oktaéderbe megy át.

Az oktaedroid csoportját most már azon forgások alkotják, melyek ezt a $2n$ pontot önmagukba viszik át. A fenti jelölésnél P'_i, O és P''_i egy egyenesen fekszik és $OP'_i = OP''_i = g$. E tulajdonság természetesen érvényes marad a pontoknak a forgás utáni új helyzetére vonatkozólag is, úgy, hogy ha P'_i átmegy P'_j-ba, akkor P''_i a P''_j-ba megy át, ha pedig egy P''_j-ba megy át P'_i, akkor P''_i átmegy P'_j-ba. A $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ pontok új helyzete tehát a $P''_1, P''_2, \ldots, P''_n$ pontok új helyzetét is megadja. Elég tehát azt vizsgálni, hogy a P'_i-k hogyan változtathatják helyüket, hiszen ennek az n pontnak új helyzete egyértelműen meghatározza a forgást (IV. fej. IV. tétele). Világos, hogy mind az n P'_i más koordinátatengelyre jut, minthogy eredetileg másmás tengelyen feküdtek. Az n tengelyen most már, mindegyiken két P lévén, 2^n féleképp választható ki egy-egy pont s így a sorrendet is tekintve $2^n n!$ féleképen. Legfeljebb annyi helyzetet foglalhat el $P'_1, \ldots, P'_n$ és így az egész oktaedroid ön-magában. Könnyen látható, hogy ez a $2^n n!$ pontosan a csoport forgásainak számát adja, t. i.

$$x'_1 = \varepsilon_1 x_{i_1}, \; x'_2 = \varepsilon_2 x_{i_2}, \dots, x'_n = \varepsilon_n x_{i_n} \quad (\varepsilon = \pm 1) \qquad \text{(I)}$$

oktaedroidforgást ád, bármicsoda permutácziója is $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ az $(1, 2, \dots, n)$-nek és bármikép veszik is fel az ε-k a $+1$ vagy -1 értéket. Ez az épen $2^n n!$ számú forgás önmagukba viszi át a P-ket: P'_k-t (P''_k-t) P'_{i_k}-be (P''_{i_k}-be) vagy P''_{i_k}-be (P'_{i_k}-be)viszi, a szerint, a mint $\varepsilon_k = 1$ vagy $\varepsilon_k = -1$. Tehát

I. *A teljes oktaedroidcsoport $2^n n!$ forgást tartalmaz.*

Az (I) orthogonális substituczió determinánsának, $|a_{\varrho\sigma}|$-nak elemei így adhatók meg:

$$a_{\varrho\sigma} = \varepsilon_k, \quad \text{ha} \quad \sigma = k \quad \text{és} \quad \rho = i_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

egyébként pedig

$$a_{\varrho\sigma} = 0.$$

Ha $g = 0$ vagy 1, a szerint, a mint a (k, i_k) permutáczió páros vagy páratlan; és $m = 0$ vagy 1 a szerint, a mint az n számú ε közt a -1 értékűek száma páros vagy páratlan, akkor e determináns értéke:

$$|a_{\varrho\sigma}| = (-1)^g \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = (-1)^{g+m}.$$

Az (I) *forgás tehát valódi vagy nem valódi a szerint, a mint $g+m$ páros vagy páratlan.* A $2^n n!$ számú eshetőségnél $g+m$ ugyanannyiszor páros, mint páratlan és így:

II. *Az oktaedroidcsoport $2^{n-1} n!$ valódi és ugyanennyi nem valódi forgást foglal magában.*

Ha S valódi, T pedig tetszőleges oktaedroidforgás, akkor TST^{-1} szintén valódi oktaedroidforgás s így a valódi oktaedroidforgások a teljes oktaedroidcsoportban invariáns alcsoportot alkotnak:

III. *A teljes oktaedroidcsoport sohasem egyszerű.*

Tekintsük most azon valódi oktaedroidforgások összességét,

Q-t, melyekre g is, m is zérus. Ha S és T a Q-hoz tartozik, akkor ST is ilyen. Ha t. i. S a (k, i_k) permutáczióval és $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ sorozattal, T pedig a (k, j_k) permutáczióval és $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ sorozattal van megadva, akkor ST a (k, i_k) és (k, j_k) permutácziók szorzatával és az $(\varepsilon_1\eta_1, \varepsilon_2\eta_2, \ldots, \varepsilon_n\eta_n)$ sorozattal jellemezhető. Két páros permutáczió szorzata páros lévén, ST-re is: $g=0$ és egyszersmind $m=0$, mert $\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_i=1$-ből és $\prod_{i=1}^{n}\eta_i=1$-ből $\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_i\eta_i=1$ következik. A Q tehát *csoport*, mely — mint könnyen belátható — $2^{n-2}n!$ substituczíót tartalmaz. Kimutatjuk most, hogy Q invariáns alcsoportja a valódi oktaedroidcsoportnak.[1] Az előbbi módon belátható, hogy oktaedroidforgások összetevésénél «az m-ek is és a g-k is összeadódnak». Ha tehát S a Q-hoz tartozik és T tetszőleges oktaedroidforgás, akkor TST^{-1} is Q-hoz tartozik, minthogy T-hez és T^{-1}-hez ugyanazon m és g szám tartozik. A kimondott tétel ezzel be van bizonyitva:

IV. *A valódi oktaedroidcsoport sohasem egyszerű.*[2]

Az (I) alatt megadott általános oktaedroidforgás tengelyét az

$$x_k = \varepsilon_k x_{i_k} \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{II}$$

egyenletrendszer adja. A tengelyméret meghatározása czéljából meg kell vizsgálnunk, hogy e között az n egyenlet között hány az egymástól független. A (k, i_k) permutáczíót ismét cziklusokra bontva, legyen:

$$(k, i_k) = C_1 C_2 \ldots C_p$$

---

[1] E tételt — bebizonyitás nélkül — PUCHTA mondta ki, elsőnek említett czikkében (835. l.). Ugyanitt — szintén minden bizonyitás nélkül — azt állítja PUCHTA, hogy a $2n$ számú oktaedroidcsúcspont ama permutácziói, melyek valódi oktaedroidforgásokkal létrehozhatók, az összes permutácziók-nak invariáns alcsoportját alkotják. Ez azonban nem helyes: a symmetrikus csoportnak $n > 4$ esetében az alternáló az egyedüli invariáns alcsoportja, a mint ez az utóbbinak egyszerűségéből elég egyszerűen kimutatható.

[2] $n=3$ esetében az invariáns Q alcsoport egy (valódi) tetraédercsoport; l. KLEIN: «Ikosaeder», 16. l.

és a C_ϱ elemeinek a száma c_ϱ:[1]

$$C_\varrho = (x_{\varrho 1}, x_{\varrho 2}, \dots, x_{\varrho c_\varrho})$$

úgy, hogy

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_p = n.$$

A (II) egyenletek mindegyike valamely cziklushoz tartozik: C_ϱ-hoz ezek tartoznak:

$$x_{\varrho 1} = \varepsilon_{\varrho 1} x_{\varrho 2},\ x_{\varrho 2} = \varepsilon_{\varrho 2} x_{\varrho 3}, \dots, x_{\varrho c_\varrho} = \varepsilon_{\varrho c_\varrho} x_{\varrho 1}. \qquad \text{(III)}$$

Különböző cziklusokhoz tartozó egyenletei a (II)-nek egymástól okvetetlenül függetlenek, minthogy ilyenekben csupa más x szerepel.

A (III) első $c_\varrho - 1$ egyenlete is okvetetlenül független egymástól, mert itt mindegyik egyenletben egy-egy új x lép fel. Tehát vagy mind a c_ϱ egyenlet független egymástól, ha t. i. a (III) rendszer determinánsa, Δ nem tűnik el, vagy csak $c_\varrho - 1$ egyenlet független egymástól, a mikor t. i. $\Delta = 0$. E determináns:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon_{\varrho 1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon_{\varrho 2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\varepsilon_{\varrho, c_\varrho - 1} \\ -\varepsilon_{\varrho c_\varrho} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Az első sor (vagy oszlop) szerint kifejtve, közvetetlenül nyerjük, hogy

$$\Delta = 1 - \varepsilon_{\varrho 1} \varepsilon_{\varrho 2} \dots \varepsilon_{\varrho c_\varrho} = 1 - \Pi^{(\varrho)} \varepsilon$$

s így $\Delta = 0$ vagy $\neq 0$ a szerint, a mint $\Pi^{(\varrho)} \varepsilon = +1$ vagy -1. Első esetben $c_\varrho - 1$, a másodikban c_ϱ a (III) egymástól független egyenleteinek a száma.

Ha tehát most már $m_\varrho = 0$ vagy 1, a szerint, a mint $\Pi^{(\varrho)} \varepsilon = -1$ vagy $+1$ (azaz $m_\varrho + 1$ congruens mod. 2 az $\varepsilon_{\varrho 1}, \varepsilon_{\varrho 2}, \dots, \varepsilon_{\varrho c_\varrho}$ közti -1 értékű számok számával), akkor a C_ϱ-hoz tartozó egyenletek közt $c_\varrho - m_\varrho$ az egymástól független.

---

[1] A két index használatára vonatkozólag lásd az [1] jegyzetet a 35. lapon.

Mind az n számú (II) egyenlet közt tehát az egymástól függetlenek száma:

$$\sum_{\varrho=1}^{p}(c_\varrho - m_\varrho) = \sum_{\varrho=1}^{p} c_\varrho - \sum_{\varrho=1}^{p} m_\varrho = n - d,$$

hol *d ama cziklusok száma, melyekre $\Pi^{(\varrho)}\varepsilon = 1$*, azaz a melyekhez tartozó ε-ok közt páros számú -1 értékű van. Tehát:

V. *Az általános oktaedroidforgás tengelyének mérete: d.*

Innen most már levezethetők a megelőző fejezet II—VI. tételeinek megfelelő eredmények, melyek azonban nem fejezhetők ki oly rendkívül egyszerű alakban, mint a simplexekre vonatkozólag.

Végül áttérünk a harmadik és utolsó szabályos testre, mely azonban, mint látni fogjuk, nem vezet az orthogonális substitucziók új véges csoportjához. E testet, mely $n=3$ esetében a hexaéderhez vezet, *hexaedroid*nak nevezzük.

A hexaedroid legegyszerűbben, mint a 2^n számú

$$(\varepsilon_1 h, \varepsilon_2 h, \ldots, \varepsilon_n h)$$

pont összessége adható meg, hol az ε-ok minden lehető (2^n-féle) módon felveszik a $+1$ és -1 értékeket.

Az (I) alatt megadott $2^n n!$ számú forgás, az oktaedroidforgások e pontokat önmagukba viszik át és belátható, hogy ezek az egyedüliek.[1] E forgáscsoporttal nem kell tehát tovább foglalkoznunk:

VI. *A teljes és valódi hexaedroidcsoport megegyezik a teljes, illetve valódi oktaedroidcsoporttal.*

Kőnig Dénes.

---

[1] Ismeretes t. i. (l. SCHOUTE munkájának II. kötetét, 256. l.), hogy a valódi hexaedroidcsoport, ép úgy, mint a valódi oktaedroidcsoport $2^{n-1}n!$ forgást tartalmaz.

AZ ELEKTRON-ELMÉLET EREDMÉNYEI ÉS PROBLÉMÁI.

(H. A. LORENTZ előadása.)

(Negyedik és befejező közlemény.)

Ugyanezen alapgondolatot, mint azt RIECKE és DRUDE már megtették, más tüneményekre, a thermo-elektromos áramokra, valamint a PELTIER-, THOMSON- (lord Kelvin) és HALL-féle tüneményekre is alkalmazhatjuk. Az itt felötlő problemáknál nem időzhetek a kellő részletességig, s csak arra szorítkozhatom, hogy néhány szóval jellemezzem azt, miként alakulnak a magyarázatok abban az esetben, ha a szabad elektronoknak csak egy faját, mondjuk csak a negativokat föltételezzük.

Legközelebb gondoljunk két egymással érintkező, különböző A, B fémdarabra. Ha az ilyen rendszer minden részében ugyanazon hőmérséklet uralkodik, akkor oly egyensúlyi állapot jön létre, melynél meghatározott potencziálkülönbség áll fenn. Ezen ú. n. kontakt-potencziálkülönbséget HELMHOLTZ bizonyos molekuláris erők fölvételével magyarázta meg, melyekkel a fémek részecskéi az elektromosságra igen kicsiny távolságokban hatnak. Ez a felfogás olyan, hogy azt azonnal átvihetjük az elektron-elméletbe. Ha például az A fém a szabad elektronokat erősebben vonzza mint a B fém, akkor, ha eredetileg még potencziálkülönbség nem állott fenn, az elektronok bizonyos száma B-től A felé fog elmozdulni. Ennek következtében A negativ, B pedig pozitiv töltést kap, s ez a körülmény csakhamar staczionär állapotra vezet, a mennyiben az elektronokra ható azon erő, mely a potencziálkülönbségből származik, az egyenlőtlen vonzásból származó erővel egyensúlyt fog tartani. Különben minden nehézség nélkül bebizonyítható, hogy a

HELMHOLTZ-féle molekuláris erők sohasem képesek egy zárt fémes vezetékben áramot létrehozni, minélfogva a thermoelektromos áramok magyarázatát más úton kell megkisérlenünk. E mellett abból a felfogásból akarunk kiindulni, hogy a fémben a szabad elektronok az atomoktól valamely disszocziáczió-folyamat útján váltak el, s hogy a disszocziáczió egyensúlya megkivánja azt, hogy ezen részecskéknek térfogategységenkinti N száma minden fémben egy a hőmérséklettől függő törvény szerinti értékkel birjon. Ha ez az érték a most tekintetbe vett rendszernél az A fémre vonatkozólag kisebb, mint a B fémnél, akkor a HELMHOLTZ-féle molekuláris erők teljes mellőzése esetében az elektronoknak már hőmozgásából is az fog következni, hogy azok nagyobb számban haladnak B-től A felé mint A-tól B felé.

Azonban világos, hogy ezen folyamatnak, melyet a negativ elektromosságnak B-től A felé való *átszűrődése* nevén hívhatunk, rövid idő alatt be kell végződnie. Ugyanis az A-ban felhalmozódó negativ töltés és a B-ben foglalt, neki megfelelő pozitiv töltés oly potencziálkülönbségre vezetnek, mely a negativ részecskéknek egy bizonyos, A felé irányuló haladását késleltetni fogja, az ellenkező irányban valót pedig sietteti. Ha ily módon annyira jutottunk, hogy az elektronok már mindkét irányban egyenlő számban haladnak, akkor a potencziálkülönbség elérte végleges értékét.

A thermooszlop elektromotoros erejére vonatkozólag úgy kapunk kifejezést, ha a hőmérsékleti különbségre és ennek megfelelőleg a hőmozgás különbözőségére való tekintettel a megfontolásokat mindkét forrasztási helyre alkalmazzuk, s azonkívül tekintetbe veszszük azt, hogy a hőmérsékleti különbségek minden egyes fémben is törekszenek az elektronoknak adott irányú vándorlását létrehozni.

A végeredményre szükségtelen hivatkoznom; csupán azt említem föl, hogy minden az N_1 és N_2 értékek arányától függ, melyek az egyes fémekben föllépő szabad elektronok számát jelentik.

Ha mind N_1, mind pedig N_2 a hőmérséklettől függetlenek, vagy ha fölmelegedés közben mindkettő ugyanazon arány szerint változik, akkor egy a forrasztási helyek hőmérsékleti különbségével arányos elektromotoros erőre vezettetünk. Bonyolódottabbá válik az erő és a hőmérsékletek közt fennálló kapcsolat, ha az $\frac{N_1}{N_2}$ arány a hőmérsékletnek függvénye.

A mi az elektromotoros erő absolut értékét illeti, erre nézve az elmélet egy igen egyszerű és figyelemreméltó tételhez vezet. Gondoljuk, hogy egy elektron egymagában egyszer végig halad az egész thermoelektromos körön; e közben az elektromotoros erő meghatározott munkát végez. Ennek értéke csupán egy az $\frac{N_1}{N_2}$ aránytól függő számtényezőben különbözik azon értékek különbségétől, melyet a már többször említett aT mennyiség a forrasztási helyek hőmérsékleteinél fölvesz. Ezen különbséget azon szaporodásnak is tekinthetjük, melyet a molekula haladó mozgásának közepes kinetikai energiája a közben ér el, a miközben egy gáz a hidegebb forrasztási hely hőmérsékletétől a melegebb forrasztási hely hőmérsékletéig hevíttetik.

9. Jegyzet. A T', T'' hőmérsékletű forrasztási helyekkel biró thermoláncz elektromotoros erejére vonatkozólag a következő képletet találtam:

$$F = \frac{2a}{3e} \int_{T'}^{T''} \text{lognat} \frac{N_2}{N_1} \cdot dT,$$

hol N_1 és N_2 a két fémre vonatkoznak. Ha ezen kifejezésnek pozitiv az előjele, akkor a thermoelektromos áram azon a forrasztási helyen, a melynek hőmérséklete T', az első fémtől a második fém felé irányul.

Kicsiny hőmérsékleti közre vonatkozólag közelítőleg

$$F = \frac{2a}{3e} (T'' - T') \text{lognat} \frac{N_2}{N_1},$$

tehát

$$Fe = \frac{2}{3} (aT'' - aT') \text{lognat} \frac{N_2}{N_1},$$

mely képlet a szövegben említett szabálylyal fejezhető ki, a mennyiben *Fe* az elektromotoros erőnek azon munkáját jelenti, mely az elektronnak az egész körön való végighaladására vonatkozik.

Ha a szabad elektronnak negativ töltést tulajdonítunk, akkor a bismutnak a thermoelektromos sorozat végén elfoglalt extrem elhelyezését azzal lehetne magyarázni, hogy ezen fémre nézve a szabad elektronok száma kisebb, mint bármely más fémre vonatkozólag. F-nek megfigyelt értékéből az $\frac{a}{e}$-re vonatkozólag talált értékkel kapcsolatban továbbá még az is következik, hogy antimonra nézve ez a szám körülbelül 4-szer akkora, mint bismut esetében.

*

A thermoelektromos áram keletkezésének módjára vonatkozó tárgyalásainkhoz fűződik azon hőhatásoknak vizsgálata, melyek a thermolánczban a közben állanak elő, a miközben azon tetszésszerinti más áram halad végig. Ez a probléma meglehetősen bonyolódott számításokat igényel, de elvileg semmiféle nehézségeket sem okoz. A láncz valamely részére nézve csak háromfélére kell ügyelnünk: először azon elektronok energiáját kell tekintenünk, melyek az illető részbe vándorolnak; másodszor azon részecskék energiáját, melyek azt elhagyják és harmadszor azon erőknek munkáját, melyek a vezetékdarabban levő elektronokra hatnak. Ily módon az energiatörvény alapján levezethetjük azt a hőmennyiséget, melyet a fémtől el kell vonnunk, illetőleg melyet a fémnek át kell adnunk, hogy a hőmérsékletet állandósíthassuk s ez a hőmennyiség épen az, a melyről azt állitjuk, hogy a vezetékben keletkezik, illetőleg benne absorbeálódik. A talált érték három részből tevődik össze. Közülök az első független az elektromos áramtól és kizárólag a hővezetéstől származik. A második rész arányos az áramintenzitás négyzetével s az ismeretes JOULE-féle törvénynek felel meg.

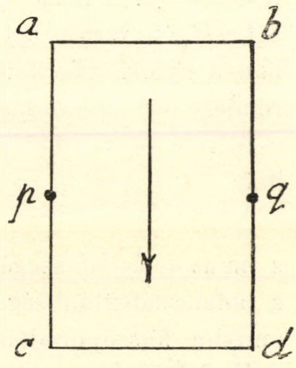
Kifejezésünk harmadik tagja azonban az áramintenzitás első hatványának megfelelőleg változik, s előjelet cserél, ha az áramot megfordítjuk; az egyik áramirány esetében fölmelegedést, a másiknál lehülést jelent. Ez a tag képleteket szolgáltat a PELTIER-effektus vagy a THOMSON-effektus számára, a szerint, a mint a kontaktus helyére, illetőleg oly homogén fémdarabra alkalmazzuk, a melyben hőmérsékleti esés mutatkozik.

Mindezen eredményekben az a legnevezetesebb, hogy a talált értékek megfelelnek azon összefüggéseknek, melyekhez a thermoelektromos tüneményekre vonatkozólag az ismeretes thermodynamikai elmélet alapján jutunk.

*

Engedjék meg, hogy még egyszer visszatérhessek a mágneses mező hatására. Valamint a ritkított gázokban tovarepülő elektronoknál, úgy ez a fémekben foglaltaknál is érdekes tüneményekre ad alkalmat, melyek közül a legrégebben ismereteset, az ú. n. HALL-effektust szándékozom röviden tárgyalni.

A tünemény észlelése czéljából a következő eljárást követjük: Az *abcd* vékony, téglalapalakú fémlemezen keresztül a nyíl irányában elektromos áramot bocsátunk, mely az *ab* oldalon lép be s a *cd* oldalon távozik. (6. rajz.) A másik két oldalon oly két *p* és *q* pontot keresünk, melyekben a potencziál ugyanakkora, úgy hogy azokat fémsodronynyal összekötvén, abban elágazási áram nem mutatkozik. Már most azt fogjuk tapasztalni, hogy egy ezen mellékzáratba kapcsolt galvanométer áramot jelez, a mint a lemezre merőleges erővonalakkal biró mágneses mezőt gerjesztünk, s ez az áram mindaddig állandó marad, míg a főáram intenzitása és a mező erőssége változatlanok. A vizsgálatok szerint a HALL-áram erőssége mind a főáraméval, mind pedig a mágneses erővel arányos; az utóbbi különösen akkor áll, ha a mező erőssége nem tulságos. Továbbá az effektus ellenkező irányúvá válik, ha vagy a főáramot, vagy a mezőt megfordítjuk.



6. ábra.

A tünemény magyarázata az elektron-elmélet alapján annyira kézenfekvő, hogy azt alapföltevéseinkre támaszkodva előre is jelezhettük volna. Gondoljuk ismét azt, hogy az elektromos áram kizárólag a negativ elektronok vándorlása; a lemezen keresztül a nyil irányában áramot bocsátani már most annyit tesz, mint ezen részecskéknek a nyillal ellenkező irányú sebességet kölcsönözni. A részecskéket a mágneses mező, melynek erővonalai a rajzlap síkjára merőlegesen felénk irányuljanak, bal felé fogja eltériteni, mint az az elektromagnetikus erőre vonatkozó szabályból következik. Ennek következtében a mellékzáratban áramnak kell föllépnie, s ha ilyen nincsen, akkor az *ac* és *bd* határvonalak közt potencziálkülönbségnek kell mutatkoznia; a potencziál *bd*-ben emelkedik, *ac*-ben pedig csökkenik.

Az effektus fokát, legalább közelítőleg, könnyű szerrel megállapíthatjuk. E czélból ismét *e*-vel jelöljük az elektron töltését, *H*-val a mező erősségét, *v*-vel az elektronnak vándorlási sebességét, vagyis azt a közös sebességet, mely a mi példánkban a nyillal ellentétes irányú, s a melylyel az elektronok a rendezetlen hőmozgáson felül rendelkeznek. Azon erő, mely a főáram és a mező együttes fennállása esetében az elektronra hat

$$evH,$$

s ha az *ac* és *bd* szegélyek el vannak szigetelve, akkor bennük a potencziálkülönbség s az ennek megfelelő E elektromos erő annyira fölszaporodnak, hogy az elektronra ható eE erő az evH elektromagnetikus hatást épen egyensúlyozni fogja. Ennélfogva

$$E = vH,$$

mely eredmény már azért is érdekes, mert az E transverzális elektromos erő értékét a Hall-áram megfigyeléséből nyerhetjük, s ennek kapcsán az elektronok vándorlási sebességét a

$$v = \frac{E}{H}$$

képlet alapján számíthatjuk.

Ezt a számítást a Hall-féle fölfedezés ismeretessé válása után, évekkel ezelőtt Boltzmann már elvégezte. Arra a nevezetes eredményre jutott, hogy az áramlási sebesség még igen erős áramok esetében is nagyon csekély. Az 1 mm^2 keresztmetszetű rézdrót esetében, ha rajta 1 amp.-nyi erősségű áram halad keresztül, a sebességet 0·005 $cmsec^{-1}$ értékűre becsülhetjük. Nikkelre vonatkozólag az eredmény 0·2 $cmsec^{-1}$, míg bismutnál a kivételesen magas 90 $cmsec^{-1}$ érték mutatkozik. Ebből láthatják, milyen csekély az a változás, melyet a rendezetlen és néhány ezer méteres sebességű hőmozgásoknál aránylag nagy elektromos erők előidézni képesek.

*

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy a fémek elektron-elméletének azon fontos kérdését, vajjon egyetlenegy fajta szabad elektronok fölvételével beérhetjük-e, közelebbről szemügyre vehetjük. Erre nézve első sorban megjegyzendő, hogy az elmélet a Hall-effektus egyik vagy másik irányát követeli meg, a szerint, a mint pozitiv, illetőleg negativ elektronokkal operálunk. Hogy milyen az irány, ha csupán negativ elektronok szerepelnek, azt a megelőzőkben már láttuk.

Abban az esetben, a melyre a 6. rajz vonatkozik, a mágneses mező föltételezett iránya mellett a *bd* szegélyen lép föl a magasabb potencziál. De ha a nyíllal jelzett főáramot a pozitiv elektronok mozgásaként fogjuk föl, akkor az ellenkező eredményre jutunk. Ekkor ugyanis azt kell gondolnunk, hogy az elektronok a nyíl iránya mentén vándorolnak, minélfogva a mágneses mezőtől bal felé teríttetnek el, épen úgy, mint megelőzőleg a negativ részecskék, s a potencziál *p*-ben emelkedik, *q*-ban pedig csökkenik.

Tényleg a Hall-effektusnak nem mindig egyazon irányú kisérleti berendezésünk esetében a potencziál a *bd* szegélyen emelkedik, ha a lemezke például bismutból, aranyból vagy rézből készült, ellenben az *ac* szegélyen emelkedik, ha vassal, zinkkel dolgozunk. Ez azon nézetet támogatja, hogy nemcsak negativ, hanem pozitiv szabad elektronok is léteznek, s hogy a Hall-áram irányát az első esetben a negativ részecskék mozgása szabja meg, a vasnál, zinknél pedig a pozitiv részecskéké.

Alig kell arra figyelmeztetnem, hogy ezen föltevés mellett szükségtelen annyira mennünk, hogy az egyik testben csupán pozitiv, a másikban csupán negativ elektronokat vándoroltassunk. Közvetlenül világos, hogy ha az áramban mindkét fajta részecskék részt vesznek, úgy hogy adott keresztmetszeten át az időegység alatt az egyik irányban n pozitiv, az ellenkező irányban pedig n' negativ elektron megy keresztül, az $\frac{n}{n'}$ arány egy a különböző fémekre vonatkozólag különböző nagyságú értéke mellett a két ellentétes transverzális hatás egymást leronthatná, s hogy így a Hall-áram iránya majd az egyik, majd az ellenkező leszen, a szerint, a mint az arány tényleges értéke a határértéken felül, illetőleg azon alul álló.

*

Az elektromos mozgásnak mint a pozitiv és negativ elektronok dupla áramának felfogását Drude számos e térre tartozó megfontolásainál sikeresen alkalmazta; így például ezen az alapon törekedett a Wiedemann-Franz-féle törvénytől való eltéréseket megmagyarázni. A közelebbi vizsgálatoknál azonban súlyos kétségek merülnek föl, melyek nézetem szerint annyira lényegbe vágók, hogy ha csak lehetséges, mindenesetre megkisérleném csupán csak egyfajta, a fématomoktól független elektronokkal beérni.

Nehézségek támadnak már abban az egyszerű esetben is, a mikor az M_1 fémből elektromosság lép át egy másik M_2 fémbe. (7. ábra.) Ha pq és rs az érintkezési helytől két oldalt fekvő keresztmetszetek, s az elsőn keresztül n_1 pozitiv elektron vándorol jobbra, n'_1 negativ elektron pedig balra, a másodikon keresztül n_2 pozitiv jobbra, n'_2 negativ pedig balra, akkor, minthogy az összes elektronoknak egyenlő töltéseket tulajdonitunk, természetesen

$$n_1 + n'_1 = n_2 + n'_2.$$

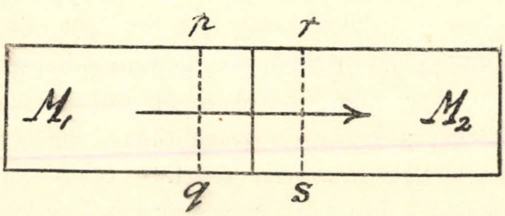
De nem számithatunk arra, hogy egyúttal

$$n_1 = n_2 \quad \text{és} \quad n'_1 = n'_2$$

legyen.

Ha már most $n_1 > n_2$, akkor az érintkezés helyén n_1-n_2 számú pozitiv és ugyanakkora $n'_2-n'_1$ számú negativ elektron halmozódik föl. Ellenben, ha $n_1<n_2$ volna, akkor az átmeneti rétegből egyenlő számú pozitiv és negativ elektron eltávolittatnék. Azt mondhatnók, hogy a határon a *neutrális elektromosság*nak vagy felszaporodása, vagy pusztulása következnék be, mely mindaddig tartana, a míg az áram fennáll.

Sőt a neutrális elektromosság eloszlásának ilyen változásaihoz elektromos áramra nem is volna szükség. Már azok az okok is, a melyekből érintkezésbeli potencziálkülönbség származik, legyenek azok akár a HELMHOLTZ-féle molekuláris erők, akár az elektronok hőmozgásai, általában hasonlót eredményez-



7. ábra.

nének. Fontolják meg azt, hogy mint azt már fölemlítettük, az elektronok egy bizonyos fajtájának az egyik fémből a másikba való átmenetele csak akkor szűnik meg, ha egy egészen meghatározott nagyságú potencziálkülönbség keletkezett. Hogy az egyensúlyi állapothoz szükséges ezen potencziálkülönbség pozitiv elektronok esetében ugyanakkora legyen, mint negativoknál, azt természetesen nem várhatjuk, ha külön e czélra kieszelt újabb hypothesisektől magunkat függetleníteni akarjuk. Sőt inkább arra a következtetésre kényszeríttetünk, hogy ha csak más körülmények nem játszanak szerepet, a szabad elektronok két fajtájának jelenléte mellett valódi egyensúly egyáltalán nem is állhat fenn; staczionär állapot csak annyiban jöhet létre, a mennyiben a potencziálkülönbségnek egy meghatározott értékénél az egyik fémből a másikba ugyanannyi pozitiv részecske vándorol, mint negativ részecske. A töltések ekkor változatlanok maradnak ugyan, de a meghatározott térfogatban foglalt neutrális elektromosság mennyisége nem maradna állandó.

Mi történjék már most ebben, vagy a megelőző esetben a felhalmozódó neutrális elektromossággal? Az vagy helyben marad, vagy a rendszernek kérdéses részeiből valami módon eltűnik; az utóbbi például oly módon történhetnék, hogy minden pozitiv elektron egy-egy negativ elektronnal egyesülne, s az így származó komplexumok a diffuzió valamelyes módja szerint azokra a helyekre szállíttatnának, a melyeken az elektronmozgások folytán neutrális elektromosság elpusztul.

Az első föltevést alig fogadhatnók el; mert hiszen ennek alapján a neutrális elektromosság jelentőségét majdnem teljesen elvesztené, a mennyiben föl kellene tételeznünk, hogy annak órákon vagy talán napokon át tartó fölhalmozódása semmiféle módon sem válik észrevehetővé, másrészt, hogy a fémnek neutrális elektromossági készlete teljességgel kimeríthetetlen. A második föltevés pedig ellenkezésben áll a thermodynamikának második alaptételével. Ha megfelelne a valóságnak, akkor két egymást érintő, egyenlő hőmérsékletű fémdarab oly rendszert alkotna, mely staczionär állapotú, de a melyben mégis azokon a helyeken, a hol ellentétes elektronok egyesülnek, hőfejlődés, más helyeken, a hol az elektronok egymástól elszakadnak, hőelnyeletés mutatkoznék.

Megjegyzendő, hogy Drude a csomót kibogozta, a mennyiben a két fémben foglalt szabad pozitiv és negativ elektronok számai közt oly kapcsolatot állapított meg, a mely mellett egyazon potencziálkülönbség elegendő arra, hogy mind a pozitiv, mind a negativ részecskék vándorlását megakaszsza.

10. Jegyzet. A föltevés abban áll, hogy a pozitiv és negativ szabad elektronok számainak szorzatát, mindkét számot a térfogategységre vonatkoztatván, meghatározott hőmérsékleten minden fémre vonatkozólag egyenlőnek tekinti.

Ezzel a nehézségek a tekintetbe vett esetben elháríttattak;

szerencsétlenségünkre azonban azok újra feltámadnak, s már nem szüntethetők meg oly könnyű szerrel, ha a thermoláncz azon homogén részeit vizsgáljuk meg behatóbban, a melyekben hőmérsékleti különbségek forognak fenn.

Ezen utalások talán elegendők annak kimutatására, milyen bonyodalmakba keveredünk, ha a dupla áramok föltevéséhez akarunk ragaszkodni. Ellenük szól különben az a tény is, hogy mindazon esetekben, a melyekben kétségtelenül pozitiv elektronokkal állunk szemben, mint például a csatornasugaraknál és az α sugaraknál, a tömeg nagyságának ugyanakkora a rendje, mint a chemiai atomoké. Ennek az a felfogás felelne meg, hogy a pozitiv töltések a fématomoktól sohasem válnak el és csupán a negativ töltések, a mennyiben a molekuláris közökben szabadon mozoghatnak, volnának közvetítői annak, hogy az elektromosság az egyik helyről a másikra átmehessen.

A tények ezen állásánál csakis a Hall-effektusnak beható elméleti megvizsgálásától remélhető a döntés. E mellett arra kell majd tekintettel lenni, hogy az atomoktól el nem szakadó elektronoknak is lehet az atomok belsejében némi mozgékonyságuk, hogy a külső mágneses erő ezeknek mozgásait is módositja, s hogy ennek a körülménynek a szabad részecskék mozgására befolyása lehet. Nem tartom kizártnak azt, hogy ily módon végtére is sikerülni fog a vasban mutatkozó Hall-effektusnak magyarázatát adni, a nélkül, hogy a szabad pozitiv elektronok fölvételéhez kellene folyamodni. Ha ez a reménység meghiusulna, akkor még csak a neutrális elektronok viselkedésének megvizsgálása marad fenn.

*

Bár az idő már sürget, végül még sem hagyhatom a fémek optikai tulajdonságait említés nélkül. Az elektromágneses elmélet ezeket is kapcsolatba hozza az elektromos tulajdonságokkal. Hiszen Maxwell következtetései közt első helyen állott az, hogy a jó vezetők igen kevéssé lehetnek átlátszóak. Az abszorpczióképesség és a vezetőképesség közt elméletileg megállapitott számkapcsolatnak sokáig kellett a kisérleti igazolásra várakoznia, mert csak a legutóbbi időben sikerült Hagennek és Rubensnek kimutatni, hogy nagy hosszúságú hősugarak esetében a fém elnyelőképessége és az ezzel kapcsolatos kisugárzó képessége absolut értékét illetőleg igen kielégitő módon kiszámithatók annak vezetőképességéből.

Ez a nevezetes eredmény, mely magában véve független az elektron-elmélettől, közelfekvőnek tünteti föl azt a nézetet, hogy azon fémekre vonatkozólag, melyeknél a vezetőképességet a Drude-féle elmélet szerint számithatjuk, hasonló megfontolások a fénysugarak és még inkább a hősugarak elnyeletését és kisugárzását illetőleg is czélravezetők lesznek.

Ennek következtében az abszorpczió- és emisszió-képességet egyszerűség okáért vékony fémlemezek esetében, s oly sugárirányra nézve, mely a lemezekre merőleges, számításnak vetettem alá, s e mellett teljesen a Drude-féle megfontolások álláspontjára helyezkedtem. Az abszorpczióra vonatkozólag igen könnyen jutunk kifejezéshez, ha azt a Maxwell-féle egyenletek alapján számitjuk, s a vezetőképességet a (8) egyenletből helyettesitjük.

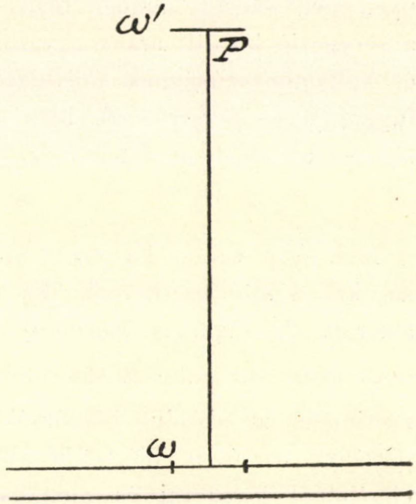
11. Jegyzet. Arra itt nem terjeszkedünk ki, hogy az eredmények mennyiben változnak meg, ha a vezetőképességnek tőlem származó képletét alkalmazzuk; különben a számítások más szempontból is kissé pontosabban volnának végigvezethetők. Ennek azonban az abszorpczió és emisszió nagyságának rendjére semmiféle befolyása nem lesz.

Az eredmény a következő:

$$A = \frac{\pi c}{\alpha T} N e^2 n l \Delta,$$

mely kifejezésben c a fény terjedési sebessége, Δ a lemeznek vastagsága, a többi jelölések pedig már nem szorulnak újabb magyarázatra. A képlet megadja a kívülről a lemezre eső sugárzásbeli energiának azon részét, melyet a fém elnyel.

Az emissziót illetőleg figyelembe vettem azt, hogy az állandó sebességgel mozgó elektronból — mint azt különben már fölemlítettem — sugárzás nem indulhat ki. Sugárzás csak akkor fog létesülni, ha a sebesség megváltozik, tehát föltevéseink szerint a fématomokkal való összeütközések alkalmával. A sugárzást kiszámíthatjuk, s a Fourier-féle tétel alkalmazásával hullámhosszúságok szerint felbonthatjuk; e mellett az összes sugárzásnak csupán azon részeire kell tekintettel lennünk, melyek a legnagyobb hullámhosszúságoktól származnak. Most csak az eredményt akarom közölni. A lemez mellső lapjának csak egy kicsiny w darabját (8. rajz) vettem szemügyre, s az abban emelt merőlegesen a lemeztől igen nagy r távolságnyira fekvő P pontban ezzel párhuzamosan egy w' felületi elemet veszek föl. Az időegység alatt w-ből kilépő és w'-on keresztülmenő sugárzásbeli energiát, a mennyiben az a λ és $\lambda+d\lambda$ közötti hullámhosszúságokra vonatkozik,



8. ábra.

$$\frac{Sww'd\lambda}{r^2}$$

alakban írhatjuk, hol az S tényező a lemez emisszióképességének kifejezője. Az erre vonatkozólag talált képlet

$$S = \frac{4\pi c^2}{3\lambda^4} Ne^2 n l \Delta.$$

Ezen egyenletből az abszorpczióra vonatkozóval való egybevetés útján az következik, hogy az $\frac{S}{A}$ arány független a lemeznek Δ vastagságától s mindazon mennyiségektől, melyek az egyik fémet a másiktól megkülönböztetik. Ugyanis

$$\frac{S}{A} = \frac{4}{3}\frac{caT}{\lambda^4}. \tag{11}$$

Ez az eredmény megegyezik a híres KIRCHHOFF-féle törvénynyel, mely szerint minden testre vonatkozólag az emisszió és abszorpczió közötti arány egyazon értékű, s a hőmérsékletnek és hullámhosszúságnak univerzális függvénye. Egyben ezt a függvényt — persze csak igen nagy hullámhosszúságok esetére — az elektron-elmélet alapján meghatároztuk.

*

Igen szép volna, ha ezen elméletet kisebb hullámhosszúságokra is kiterjeszthetnők. Ez azonban eddigelé nekem nem sikerült. A sugárzás thermodynamikai elmélete azt mutatja, hogy azon hullámhosszúság, melyre vonatkozólag az $\frac{S}{A}$ arány maximális, az absolut hőmérséklettel fordítva arányos. Ezt a törvényt, az ú. n. WIEN-féle eltolódási törvényt az elektronelméletből levezetni és megállapítani azt, hogy a kérdéses hullámhosszúságtól és a hőmérsékletből alkotott állandó szorzat mi módon áll az elektronok tulajdonságaival kapcsolatban, a mely kapcsolat különben előrelátható, mert hiszen itt ismét egy univerzális állandóról van szó, ez egyelőre a megoldatlan problemák közé tartozik. Már akkor is akadályokba ütközünk, ha tisztába akarunk jönni azzal, mért lép föl a test fölmelegítésekor a test sugárzásában mindinkább több rövid hullám, ha tehát a hőmérséklet emelkedésekor előálló izzás egyszerű tényét próbáljuk megmagyarázni.

Nem hallgathatom el azt, hogy PLANCK a sugárzás elektromagnetikus elméletével ez idő szerint sokkal messzebbre jutott, mint a mennyire az elektron-elméletnek sikerült eljutnia; ő ugyanis tényleg képes volt az $\frac{S}{A}$ arány számára egy általános, minden hullámhosszúságra és hőmérsékletre érvényes egyenletet felállitani. Szerencsére a mi, igen nagy hullámhosszúságokra vonatkozó kifejezésünk ezen fizikus képletével megegyezik.

Planck a maga képlete alapján nagyon figyelemreméltó következtetésekre jutott, s mi ugyanazt tehetjük a (11) egyenletre támaszkodva, s e mellett az elektron-elméletet nem kell elhagynunk. Ugyanis az $\frac{S}{A}$ mennyiség egy tökéletesen fekete testnek emisszióját is megállapítja, a mit azonnal beláthatunk, ha figyelembe veszszük azt, hogy az ilyen test abszorpczióképessége $A = 1$.

A fekete test sugárzása azonban nemcsak összes intenzitását illetőleg, hanem a különböző hullámhosszúságokra való eloszlását illetőleg is, kisérletileg megvizsgáltatott.

Lummer, Pringsheim és Kurlbaum erre vonatkozó vizsgálatai alapján a $\frac{caT}{\lambda^4}$ abszolut értékét a különböző hullámhosszúságokra és hőmérsékletekre vonatkozólag, tehát minden hőmérsékletre nézve aT-nek értékét is, megadhatjuk. Ennélfogva az egyes gázmolekula közepes kinetikai energiáját ismerjük. Ha ezzel a gáznak összes kinetikai energiáját, melyet a nyomás alapján levezethetünk, elosztjuk, akkor a gázmolekulák számát nyerjük, ily módon megismerjük az egyes molekulának például a hydrogenmolekulának a tömegét. Ennek fele lesz a hydrogenatomnak tömege, s ha ezt a hydrogen elektrochemiai egyenértékével elosztjuk, akkor a hydrogen-ion töltését, tehát a mi elektromos elemi quantumunk nagyságát nyerjük. Végre, ha ezen eredményt $\frac{e}{m}$-nek a negativ elektronra vonatkozó értékével összekapcsoljuk, akkor m-nek értékéhez jutunk és (7) egyenletünk alapján kiszámíthatjuk a gömbalakú elektronnak küllőjét.

Az eredményeket a IV. táblázatban állítottam össze.

IV. TÁBLÁZAT.

$\alpha = 1{\cdot}6 \,.\, 10^{-6}$ erg, fokonkint.

0° hőmérsékletnél és atmoszferikus nyomáson 1 cm^3-nyi térfogatban a gázmolekulák száma	$3{\cdot}5 \,.\, 10^{19}$
A hydrogenatom tömege	$1{\cdot}3 \,.\, 10^{-24}$ gr
Az elektromos elemi quantum	$1{\cdot}3 \,.\, 10^{-20}$
elektromagnetikus *CGS* egység	
A negativ elektron tömege	$7{\cdot}4 \,.\, 10^{-28}$ gr
A negativ elektron radiusa	$1{\cdot}5 \,.\, 10^{-13}$ cm

Lehetséges, hogy az elmélet egyes részeinek szigorúbb átdolgozása után az adatok egynémelyikét meg kell majd változtatni, mégis, legalább a nagyságok rendjét illetőleg a táblázat adataiban teljesen megbizhatunk; különben a számértékek is meglehetősen elfogadhatók. A két utolsó számadat megállapításánál $\frac{e}{m}$-nek azon értékét vettem alapul, melyet a β-sugarak vizsgálatának alapján kicsiny sebességek esetében számíthatni.

12. Jegyzet. R-nek, a negativ elektron radiusának értéke azon kérdés megvitatásánál bir fontossággal, hogy milyen magas menetkülönbségekig terjed a fénysugarak interferencziájának megfigyelhetősége? Az interferencziális csíkok láthatóságának ugyanis a fénylő pont rezgéseinek csillapulása szab határt, s kimutathatjuk, ha fényforrásul egy rezgő elektron szolgál, akkor a csillapulás foka épen annak méreteitől függ.

Legyen n a rezgések szaporasága, ϑ a rezgési idő, λ a hullámhosszúság, N a hullámhosszúságokban kifejezve az a fáziskülönbség, a melylyel két sugár interferál, ε pedig a természetes logarithmusok alapszáma. Nyilvánvaló, hogy ha a találkozó rezgések nagyon eltérő intenzitásúak, akkor az interferencziális csíkok igen elmosódnak; ez pedig abban az esetben fog bekövetkezni, ha azon intervallumban, a mely a két rezgésnek a fénylő pontból való kiindulásuk pillanatai közt fekszik, a fénylő pont amplitudója tetemesen csökkent.

A keresett határt oly módon akarjuk megállapítani, hogy — a mi különben meglehetősen önkényes — N-nek azon értékét keressük, a melyre nézve $N\vartheta$ idő alatt az amplitudo 1-nek $\frac{1}{\varepsilon^2}$-hez való arányában kisebbedett.

A rezgő elektron mozgási egyenlete (lásd a 4. és 6. jegyzetet)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\frac{d^3x}{dt^3}.$$

Ha benne az utolsó tagot a másik kettőhöz képest elenyésző csekélynek tartjuk, akkor megoldásul

$$x = a\varepsilon^{-\frac{e^2n^2}{3cm}t}\cos(nt+b)$$

származik, hol a és b konstansok és

$$n = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

A hullámhosszúságok N számának meghatározására szolgáló és föntebb említett föltétel a következő egyenletre vezet:

$$\frac{e^2n^2}{3cm}N\vartheta = 2,$$

melyből, ha

$$m = \frac{2e^2}{3R}$$

tétetik és az

$$n = \frac{2\pi}{\vartheta}, \quad c\vartheta = \lambda$$

összefüggéseket is tekintetbe veszszük,

$$N = \frac{\lambda}{\pi^2 R}$$

származik, minek alapján, ha λ helyére a sárga fény hullámhosszúságát teszszük, N-re körülbelül 40 milliót nyerünk.

Lummer és Gehrbe még több mint két millió hullámhosszúságnyi fázisküIönbségnél is észleltek interferencziát.

Különben az itt említetteken kívül más okok hamarább vezetnek a csíkok eltünésére. Ezek egyike, melyre Michelson hívta föl a figyelmet, abban áll, hogy az izzó gáz molekulái minden irányban ide-oda repülvén, ennélfogva a Doppler-féle elvnek megfelelőleg oly sugarakat bocsát ki, melyeknek szaporaságuk nem pontosan egyenlő. A fény annál kevésbbé lesz homogén, s az interferenczia a menetkülönbség emelkedtével ez oknál fogva annál hamarább válik észrevehetetlenné, mennél nagyobb a gáznak molekuláris sebessége. Az interferencziális csíkok határozatlanságának azon fokát, melyre a föntebb tárgyalt csillapítás vezet, már egy a fényt kibocsátó gázban uralkodónál jóval kisebb molekuláris sebesség is okozhatná.

Az elektrotechnikusok bizonyára örömmel fogják azt fogadni, hogy most már meg van állapitva az elektromosságnak az a legkisebb mennyisége, a mely egyáltalán szerepet játszhat. Ezt kerekszámban 10^{-19} coulombnyinak vehetjük.

Előadásom befejezéséhez elérkezvén, nagyon tartok tőle, hogy várakozásukban némileg csalódtak, a mennyiben a fémek mágneses tulajdonságairól, melyek pedig az önök szempontjából kiváló fontosságúak, egy szót sem szóltam. Ennek oka abban rejlik, hogy a mágnességnek bonyodalmas tüneményei az elméletnek még számos bajt okoznak. Föltételezhetjük azt, hogy a mágnesben forgó vagy keringő elektronok foglaltatnak és Voigt, valamint újabban Langevin az ilyen mozgások mathematikai tárgyalása alapján igen érdekes eredményekre jutottak. Du Bois vizsgálatai is igen sokat igérnek az elektron-elmélet további kifejlődése szempontjából, bár tulajdonképen nem tartoznak ennek körébe. Mind a mellett oly egyszerű eredményeket, mint milyeneket önök elé terjeszteni volt szerencsém, ezen a téren nem mutathatok.

Különben is ideje már, hogy bevégezzem. Ezt azzal teszem, hogy figyelmükért, melylyel szivesek voltak megajándékozni, legszivélyesebb köszönetemet fejezem ki.

Forditotta: *dr. Bozóky Endre.*

GEOMETRIAI TÉTEL A TÖMEGKÖZÉPPONTRÓL.

Egy általános geometriai tételt fogunk bebizonyitani n térbeli pont tömegközéppontjáról. A tömegközéppont coordinátái így vannak definiálva:

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

$$\eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

$$\zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

a hol (x_i, y_i, z_i) az i pont coordinátái, m_i az i pont tömege. Homogén tömeg esetében, azaz, ha minden pont tömege ugyanannyi, $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = \mu$, lesz:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n},$$

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}.$$

Vegyünk most az n pont közül $n-1$-et tetszésszerint, így az $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} \ldots x_{i_{n-1}}$ pontokat. Ilyen combinatio van

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

Ezen $n-1$ pont tömegközéppontjának coordinátái lesznek:

$$\xi' = \frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_{n-1}}}{n-1},$$

$$\eta' = \frac{y_{i_1}+y_{i_2}+\cdots+y_{i_{n-1}}}{n-1},$$

$$\zeta' = \frac{z_{i_1}+z_{i_2}+\cdots+z_{i_{n-1}}}{n-1}.$$

A felvett $n-1$ pont tömegközéppontját kössük össze az n-ik ponttal, az összekötő egyenesnek, a (ξ', η', ζ') tömegközéppponttól vegyük az n-ik részét. Az így keletkezett osztási pont coordinátái lesznek a jól ismert analytikai geometriai képletek szerint

$$\xi'' = \frac{(n-1)\,\xi'+1\,.\,x_{i_n}}{(n-1)+1},$$

$$\eta'' = \frac{(n-1)\,\eta'+1\,.\,y_{i_n}}{(n-1)+1},$$

$$\zeta'' = \frac{(n-1)\,\zeta'+1\,.\,z_{i_n}}{(n-1)+1},$$

azaz

$$\xi'' = \frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_{n-1}}+x_{i_n}}{n} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \xi,$$

$$\eta'' = \frac{y_{i_1}+y_{i_2}+\cdots+y_{i_{n-1}}+y_{i_n}}{n} = \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n} = \eta,$$

$$\zeta'' = \frac{z_{i_1}+z_{i_2}+\cdots+z_{i_{n-1}}+z_{i_n}}{n} = \frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n} = \zeta.$$

Ebből már világos a következő általános tétel:

«*Ha n térbeli pont közül $n-1$ pontot kiválasztunk és ezek tömegközéppontját az n-ik ponttal összekötjük, n térbeli egyenest kapunk. Ezek mind egy és ugyanazon pontban metszik egymást, az n térbeli pont tömegközéppontjában, a mely tömegközéppont az összekötő egyenest ily arányban osztja:* $1:(n-1)$.»

E tétel ismeretes volt eddig $n=3$ és $n=4$ esetben, azaz a háromszög és a tetraeder esetében.

Demeczky Mihály.

EGYSZERŰ ELJÁRÁS A RADIOAKTIVITÁS MÉRÉSÉRE.

A radioaktiv sugárzások mérésére ez ideig alig rendelkezünk jó, biztos és általános módszerrel. Ennek oka azonban korántsem a mérési módszerek fogyatékosságában, mint inkább a sugárzások sokféle, részben ismeretlen sajátságaiban keresendő. Hasonló nehézségekkel állunk itt szemben, mint a fénysugárzások mérésénél: más és más eredményeket kapunk a szerint, hogy a fényforrás optikai, kalorikus, vagy chemiai sugárzását mérjük. De eme adatokat legalább minden hullámhosszra nézve megállapíthatjuk, miről a radioaktiv méréseknél egyáltalán nem lehet szó. Három különböző sugárcsoporttal van itt dolgunk, melyek ismét számos összetevőből állanak, melyek szétválasztására pedig nincsen alkalmas prizmánk.

A radioaktiv anyagoknál optikai, vagy kalorikus mérési módszerekről alig beszélhetünk, mivel ezek az effectusok csakis igen erősen activ anyagoknál mérhetőek. Maradnak tehát a chemiai módszerek és azok, melyek anyagot ionizáló sajátságaival definiálják. Ha azonban ugyanazon anyagon e két módszerrel méréseket végzünk s azokat összehasonlítjuk, látjuk, hogy azok egymástól még jobban eltérnek, mint pl. ugyanazon fényforráson eszközölt bolometeres és optikai mérés eredménye, de azért épp oly jellemző lesz az az anyag energiaállapotára nézve, mint emez a fényforrásra.

A chemiai módszereket némely szerző, egészen jogosulatlanul, nem tartja eléggé megbizhatónak, azzal érvelvén, hogy nem radioaktiv anyagok ibolyántúli fényemissiója a hatásokat épp úgy létrehozza akár a radioaktiv anyag maga. Ez tökéletesen igaz is, ámde nem szabad feledni, hogy viszont ugyanezen sugarak az elektroskopot is épp úgy kisütik, illetve vezetővé teszik a gázokat, akár a radioaktiv anyag. Ezek alapján radioaktivnak nevezhetjük-e?

E kérdésre a tárgygyal sokat foglalkozó sokkal nehezebben tud felelni, mint a felületes szemlélő. «Radioaktiv» szó definitiója még ma sem befejezett dolog. Az előbb emlitett ionizáló képesség épp úgy nem lehet kritérium, mint akár az emissió állandósága. A Balmain-féle világitó festék (phosphoreskálódás) ha jól készittetett, még hónapok mulva is világit, míg ismeretesek magától a radiumtól származó olyan termékek, melyek sugárzó képességüket napok alatt elveszitik. Ismeretesek továbbá anyagok erős chemiai s gyenge ionizáló sugárzással és viszont. A kettő aránya a legtágabb határok között változhatik.

Az «önsugárzás» szó még legjobban megfelel annak a fogalomnak, a melyet vele jelölni akarunk. Tudniillik oly anyagi, nem általános tulajdonságot kell alatta értenünk, melynek okát eddigi positiv ismereteink alapján meg nem fejthetjük. Tehát oly sugárzás, mely tudtunkkal a fénytől sem közvetve ered, nem hő, nem elektromosság az oka, nem is előttünk lefolyó chemiai reactio. Vagyis mindaz az anyagi sugárzás, melynek eredetét nem ismerjük: önsugárzás.

Ily értelemben kissé tág értékű gyűjtőnévhez jutottunk ugyan, de mégis olyanhoz, mely a fogalmat legjobban megközeliti addig, míg a további kutatások a kérdést nem tisztázzák.

A radioaktivitás definitiójával különben többen foglalkoztak. Egyik definitió az atomi átváltozáshoz fűzte a fogalom értelmét, másik a temperaturától független bomlásban vélte a lényeget meglelni.

Többek között Soddy a következő meghatározást ajánlotta: Radioaktivnak nevezzük az olyan anyagot, melynek az anyagi kisugárzás lényeges sajátsága. Kár, hogy az atomi átváltozás is, meg Soddy definitiójában az «anyagi kisugárzás» újabb magyarázatot igényel. Új fogalmat, még újabbal megérteni legalább is kissé nehézkes.

Schaum szintén igyekezett a radioaktivitás fogalmát definiálni, mi azonban neki sem sikerült.

Mindezek csak azt bizonyitják, hogy szigorú értelmű körülírást ma még alig használhatunk. Legajánlatosabb a gyűjtőnév mellett megmaradni s esetről-esetre megjelölni a sugárzás karakteristikonját.

Mint ilyenek, az egyes sugárfajok, az emanatió, az inducált aktivitás jellemző csökkenése egyaránt szerepelhetnek.

Itt leírt módszerem főképen oly anyagok vizsgálatára alkalmas, melyek γ sugárzása jelentékeny, tehát első sorban az uranvegyületekről lehet szó.

A módszer elve az, hogy tiszta, finom, poralakú fémuraniumot fotografiai lemezre engedünk hatni, s a teljesen hasonló körülmények között elhelyezett kisérleti anyag hatásával összehasonlítjuk.

Az alkalmazott műszer igen egyszerű, magunk elkészíthetjük. Meg kell azonban jegyeznem, hogy oly műszerről van szó, mely korántsem ad szigorúan tudományos meghatározásokhoz használható értékeket, hanem segítségével oly közelítő meghatározásokat végezhetünk, melyeknek némely esetben nagy hasznát vehetjük.

A vizsgálandó próbákat és az összehasonlítás alapját képező fémuraniumot igen finom porrá dörzsöljük szét. Ha uran fémmel nem rendelkeznénk, úgy az összehasonlításhoz uranoxidot is használhatunk, melyet azonban soha se szerezzünk be készen. Legczélszerűbben házilag készítjük el a következő módon: Kereskedésbeli, de teljesen tiszta uranylnitratot porczellán-csészében óvatosan megolvasztunk, majd lassanként erősebb hevítésnek vetjük alá. A só lassanként megvörösödik, majd hevesebben, gázfejlődés közben teljesen elbomlik s barnás színű uranoxiddá alakul át. Ekkor a hevítést a fujtató lámpa lángján folytatjuk tovább, mindaddig, míg a közben többször szétdörzsölt só színe nem lesz többé sötétebb. Ekkor az átalakulás tökéletes és befejezett.

Az újból vörös izzóvá tett pyrophoros port ezután tégelyestől exsiccatorba teszszük, majd kihülése után kivéve szétdörzsöljük, mikor is már használatra kész. Ez az uranoxid az összehasonlításra igen jól, sok esetben még az urannál is előnyösebben használható, mert nincs annyira változásnak alávetve, ha a levegőn áll, mint a fémuran.

Az anyagokat apró edénykékben helyezzük el, melyeket a következőképen készitünk el: körülbelül egy cm. belső átmérőjű s lehetőleg vastag falú üvegcsőből mintegy negyven darab egy cm. magas gyűrűt repesztünk le, s éleiket alul-fölül lecsiszoljuk. Az edény fenekét csillám vagy kvarczlemezkék, tetőlapját pedig paraffinból készitett dugasz képezi.

A feneket képező csillám-, vagy kvarczlemezkék megválasztása igen nagy gondot igényel, mert a készülék használhatósága ettől függ. A csillámlemezeket magunk is hasithatjuk, de ekkor ugyanazon vizsgálatsorhoz csak az ugyanazon hasitott lemezből vágott darabokat használhatjuk, mert fontos, hogy a lemezek vastagsága lehetőleg ugyanaz legyen. Két egyenlően vastag lemezt alig hasithatunk.

Sokkal czélszerűbb ezért a fenék készitésére azokat a lemezkéket felhasználni, melyek mikroskopi fedőlemezek gyanánt jönnek a kereskedésbe. Ezek akár kvarczból, akár csillámból készitve kaphatók, s igen egyenletesek; a csillámból készültek még az ugyanily czélra forgalomba kerülő üveglemezkéknél is sokkal vékonyabbak.

Vagy csillámból, vagy kvarczból körlapocskákat vágunk ki, előbbiből legczélszerűbben ollóval. A lapocskák mérete olyan legyen, hogy az üveggyűrűk alsó részét teljesen födje, ezek szélén azonban túl ne nyúljon.

Az odaerősitést egyszerűen sűrű arab gummi oldattal való ragasztással végezzük. A mézgaoldatot előnyös azonban használat előtt igen kevés gliczerinnel keverni, különben a megszáradáskor a csillám már egyszerű érintésre lepattan róla.

A paraffin dugaszokat úgy készitjük, hogy hosszabb csövet, melynek belső átmérője körülbelül 12 mm., megtöltünk olvasztott paraffinnal. A teljes kihülés után a csövet végig egyenletesen megmelegítjük, de csak annyira, hogy a paraffin éppen csak az érintkezés felületén kezdjen olvadni, mikor a paraffinrudat pálczikával kitolhatjuk.

A rúdból most meleg késsel mintegy 1 cm. hosszú korongokat vágunk. E korongokat feléig belenyomjuk egy, a fent leírt módon készült s jól megmelegített üveggyűrűbe. Ezáltal peremek képződnek, melyek a biztos tartást (mivel a dugasz egyúttal fogó gyanánt is szolgál) és zárást lehetővé teszik.

Az edénykék elkészítésével ezzel készen is volnánk. Következik a tartó elkészítése.

A tartó oly négyszögletes, hosszúkás falemez, melybe lyukak vannak fúrva. A lemez vékony legyen, a lyukak átmérője pedig akkora, hogy az üvegedénykék kényelmesen beleilljenek. A lemez két oldalára még keskeny, két mm. magas falemez van erősítve, mely láb gyanánt szolgál. Ha a tartó teljesen elkészült, olvasztott paraffinba mártjuk mindaddig, míg azzal jól tele nem itta magát. Ezután kivéve, megszárítjuk, mi különben pár pillanat alatt bekövetkezik.

Ha most még oly dobozt veszünk elő, melyben a fotográflemezeket szokás tartani, meg néhány fotográflemezt vagy filmet, úgy mi sem áll többé útjában a vizsgálat megkezdésének. Másféle dobozt, mint ilyet, ne használjunk, mert a papir esetleges gázai károsan befolyásolhatják a lemezt.

A fotográf-lemezek közül a legjobb a Lumière czég sárga vignettás Σ jegyű lemeze, mely a legérzékenyebb lévén, leghamarabb czélra vezet. Filmek közül leginkább a Kodak Ltd. filmjei használhatók.

A vizsgálat kivitele a következő: 20—40 drb. fenti módon készült üvegedénykét megtöltünk fél cm. magasságig uranium, vagy uranoxid porral, melyet aztán kissé lerázogatunk. A fél centiméteres magasságot czélszerű előre karczolással megjelölni valamenyi gyűrűn.

Ugyanennyi edénykét a kisérleti anyag porával ugyanily módon töltünk meg, s úgy ezeket, mint az előbbieket megszámozzuk, a dugaszokat helyeikre illesztjük.

Teljesen sötét szobában, mely még vörös lámpával is csak gyöngén legyen világítva, elkészítjük a dobozt, belehelyezzük a filmet vagy lemezt s erre a tartót. A tartón lévő egyik sor lyuk mindig az uranoxid, a másik sor mindig a kisérleti anyag felvételére szolgál: a két sor egymással párhuzamosan fut.

Most az első nyílásba s az azzal szemköztibe, behelyezünk egy-egy edényt, melyek közül az egyik urannal, a másik kisérleti próbával volt töltve. Ezt a műveletet hat—tizenkét óránként megismételve, az anyag aktivitása szerint folytatjuk 4—10 napon át.

Ekkor előidézzük a lemezt. Előhívóul akármiféle előidézőszert használhatunk, de mindig frisset, soha sem használtat. Legjobbak a brillánsan dolgozó hivók, milyen a rodinal, glicin stb. Mindenesetre ajánlatos őket használat előtt phenolphtaleinnel és glycerinnel keverni, mikor aztán az oldat vörös színe igen jó óvszer az előidézés tartamára a káros sugarak hatása ellen. Az előidézés után az állandósítás, szárítás következik, majd hosszában kettévágjuk a lemezt.

Az érzékeny réteg borítva lesz kerek, különbözően árnyalt fekete folttal. A további feladatunk éppen egy, vagy több pár teljesen egyenlően árnyalt foltot kikeresni (az egyik folt mindig az urané, másik a kisérleti próbáé legyen), a mi, tekintve, hogy minden foltot közvetlenül a másik mellé helyezhetünk, nem ütközik nehézségbe. Ha mármost ugyanezen foltok hatásidejét összehasonlítjuk: a sugárzás relativ intenzitását máris meghatároztuk.

Az összehasonlítást akár fotometrikus uton is végezhetjük, de mivel a vizsgálat úgyis csak tájékoztató jelleggel bír, a szemmel való összehasonlítás egész biztossággal eszközölhető.

Az e módszerrel való vizsgálatok kiválóan előnyösen akkor alkalmazhatók, ha több vegyület (ásvány) radioaktivitásáról, illetve fémthorium, vagy urantartalmáról akarunk magunknak gyors uton, de kevés fáradsággal képet alkotni.

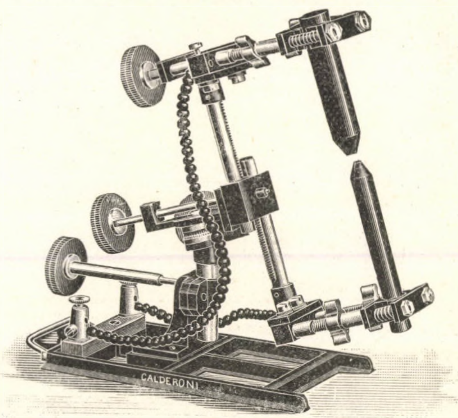
Szilárd Béla.

Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **23.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480cm.négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**-	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhatodik társulati év 1907 január 1-jén kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**